Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Приморская государственная сельскохозяйственная академия»
Институт земледелия и природообустройства

Кафедра физики и высшей математики

Жуплей И.В.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для практических занятий
и самостоятельной работы
для обучающихся по направлению подготовки
38.03.01 Экономика

Уссурийск 2017

УДК 514.12
ББК 22.18 я73

Рецензенты:
Ю.Д. Шмидт, д-р экон. наук, профессор, зав. кафедрой бизнес-информатики и экономико-математических методов Дальневосточного федерального университета, г. Владивосток
Л. Д. Ердакова, канд. пед. наук, доцент, доцент кафедры физики и теоретической механики ПримИЖТ филиала ДВГУПС в г. Уссурийске, г. Уссурийск

Жуплей, И.В. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учеб. пособие для практических занятий и самостоятельной работы для обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика /И.В. Жуплей. - Уссурийск: ФГБОУ ВО Приморская ГСХА, 2017. – 146 с.

Учебное пособие предназначено для практических занятий и выполнения самостоятельной работы по разделам «Линейная алгебра» и «Аналитическая геометрия») дисциплины (модуля) Математика для обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата).

Включает перечень вопросов, необходимый теоретический минимум, решение основных типов задач, значительный подбор задач и тесты, что позволит эффективно использовать пособие для самостоятельной работы, а также при проведении контролирующих мероприятий.

Содержит необходимый теоретический минимум, решение основных типов задач, вопросы и тест для самопроверки, а также задания для самостоятельного решения.

Для обучающихся очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата).

Издается по решению методического совета ФГБОУ ВО Приморская ГСХА

Предисловие

Обучающиеся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата) в начале своего обучения (на первом курсе) изучают курс математики, который служит фундаментальной базой экономического образования. В связи с чем, для подготовки бакалавров экономических профилей необходимы не только учебники и справочники по тем или иным разделам математики, но и пособия, способствующие как закреплению изученного на лекционных или практических занятиях материала, так и направленные для самостоятельного изучения отдельных тем и выработки навыков по решению обязательного набора задач в рамках каждой темы.

Учебное пособие состоит из пяти глав («Определители матриц. Решение систем линейных уравнений», «Элементы векторной алгебры», «Прямая линия на плоскости», «Кривые второго порядка», «Прямая и плоскость в пространстве»), каждая из которых содержит необходимый теоретический минимум, примеры решения типовых задач, подбор заданий для самостоятельного решения, тестовые задания и перечень вопросов для самопроверки.

Задания расположены преимущественно по возрастанию их степени сложности и сгруппированы следующим образом: сначала предложены задачи обязательного уровня (желательно их решение в аудитории), затем (после черты) – задачи, которые можно предложить обучающимся для самостоятельного решения (также стандартный набор заданий), и третья группа (после двойной черты) – задачи для дополнительного решения.

Предназначено пособи в первую очередь проведения практических занятий и организации самостоятельной работы обучающихся сельскохозяйственных образовательных организаций по направлению подготовки 38.03.01 Экономика (уровень бакалавриата), но может быть использовано и для других образовательных организаций не обязательно сельскохозяйственной направленности).

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Необходимый теоретический минимум

Матрицы. Основные понятия

Определение 1.1. **Матрицей** называется прямоугольная таблица чисел, расположенных строками и столбцами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1.1)}$$

- Таблица вида (1.1) называется $(m \times n)$ – матрицей (или матрицей размера $(m \times n)$), так как она имеет m строк и n столбцов. Для обозначения матрицы применяются или круглые скобки ( ), или квадратные скобки [ ], или двойные вертикальные черточки ‖ ‖, которыми заключают квадратные таблицы чисел. Причем следует отметить, что *матрица не имеет числовой величины*. Это просто условный способ обозначения таблиц с числами.
- Так как в общем виде матрицы представляют собой двумерные таблицы чисел, то для обозначения каждого из её *элементов* принято использовать двойные индексы. Первый индекс обозначает номер строки, а второй – номер столбца.

Определение 1.2. Матрица, имеющая одинаковое число строк и столбцов, называется **квадратной матрицей**.

- Квадратную матрицу, состоящую из n строк и n столбцов, называют матрицей n – го порядка. Любая матрица n – го порядка представляет собой квадратную матрицу (по определению 1.2).

Примеры. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 15 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ –

представляют собой матрицы, но

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & -7 \\ 3 & 23 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & 4 & \\ & 1 & \\ 5 & & 7 \\ & 13 & \end{pmatrix}$$

не являются матрицами, так как они не составляют прямоугольных таблиц чисел.

- Обозначают матрицы прописными латинскими буквами (*A, B, C* и т. д.), а элементы матриц – строчными латинскими буквами (a_{ij}, b_{ij} и т.д.). Мы можем записать

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1.2)}$$

- Совокупность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} образует *главную диагональ*, а элементы a_{1n}, a_{2n-1}, a_{3n-2}, ..., a_{n1} – *побочную*.

Операции над матрицами

1. **Равенство.** Две матрицы *A* и *B* называются **равными** (обозначают $A=B$), если равны их соответствующие элементы. Таким образом, $A=B$, тогда и только тогда, когда $a_{ij}=b_{ij}$.

2. **Умножение на число.** Пусть даны матрица A и число λ. Произведением λA является матрица

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1.3)}$$

Здесь каждый элемент матрицы A умножен на число λ. Произведение λA представляет собой уже другую матрицу, имеющую m строк и n столбцов в том случае, если исходная матрица A имеет m строк и n столбцов.

Пример. Пусть λ=2, $\mu = -2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, тогда получаем:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 14 \end{pmatrix};$$

$$\mu A = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 2 \\ -2\cdot 5 & -2\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -10 & -14 \end{pmatrix}.$$

3. **Сложение. Суммой** матрицы A, имеющей m строк и n столбцов и матрицы B, имеющей также m строк и n столбцов, называется матрица C, элементы которой равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (для всех i, j).

Пример. Сумма $C = A + B$ матриц A и B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

равна

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+1 \\ 3+5 & 4+3 \\ 2+6 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 7 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Из определения сложения матриц следует, что матричное сложение удовлетворяет:

а) *ассоциативному* закону, т.е.: $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C;$

б) *коммутативному* закону, т.е.: $A+B=B+A$.

4. **Вычитание.** Вычитание матриц определяется через уже рассмотренные операции: $A-B=A+(-1)B$.

Пример. Разность $C=A-B$ матриц A и B

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 5 & 3\\ 6 & 4\end{pmatrix}$$

равна

$$C=A-B=\begin{pmatrix}1-4 & -2-1\\ 3-5 & 4-3\\ 2-6 & 5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -2 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}.$$

5. **Умножение матриц. Произведением** $(m \times n)$ – матрицы A и $(n \times r)$ – матрицы B называется матрица C, элементы которой получаются из элементов матриц A и B по следующей формуле:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\,,\quad i=\overline{1,m}\,,\quad j=\overline{1,r}. \qquad (1.4)$$

- В матричном произведении AB матрица A называется *левым множителем*, а матрица B – *правым множителем*.
- Матрица A допускает умножение на матрицу B и дает произведение в том и только в том случае, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B. Произведение $C=AB$ имеет одинаковое число строк с матрицей A и одинаковое число столбцов с матрицей B.

Примеры.

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix};\ C=AB=\begin{pmatrix}1\cdot 2+3\cdot 3 & 1\cdot 1+3\cdot 5\\ 2\cdot 2+4\cdot 3 & 2\cdot 1+4\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 16\\ 16 & 22\end{pmatrix}.$

2. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$; $C=AB=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 4+2\cdot 5\\ 6\cdot 4+1\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\ 29\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}$;

$$C=AB=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 4+0\cdot 6 & 3\cdot 7+0\cdot 8\\ 1\cdot 4+1\cdot 6 & 1\cdot 7+1\cdot 8\\ 5\cdot 4+2\cdot 6 & 5\cdot 7+2\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 21\\ 10 & 15\\ 32 & 51\end{pmatrix}.$$

- Для матричного умножения:

  а) в общем случае *не выполняется коммутативный* закон, т.е.:

$$AB \neq BA;$$

  б) *выполняется ассоциативный* закон, т.е.: $(AB)C = A(BC) = ABC$;

  в) *выполняется дистрибутивный* закон (относительно сложения),

  т.е.: $A(B + C) = AB + AC$.

Определение 1.3. Матрицей, **транспонированной** к матрице A, является матрица, образованная из матрицы A заменой i – й строки матрицы A её i – м столбцом.

Пример. К матрице $A=\begin{pmatrix}7 & 6 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ транспонированной будет матрица

$$A^T=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 6 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования матриц:

1^0. Отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы.

2^0. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.

3^0. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.

4^0. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5^0. Транспонирование матрицы.

- С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к **ступенчатому виду:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix} \quad \left(a_{ij} \neq 0\,, \quad i = \overline{1;r}\,; \quad r \leq k)\right).$$

Определители матриц, их вычисление

Определение 1.5. **Определителем матрицы второго порядка**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

обозначаемым $|A|$**,** называется число, равное $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$**,** т.е.:

$$\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad \textbf{(1.5)}$$

Определение 1.6. **Определителем матрицы третьего порядка**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

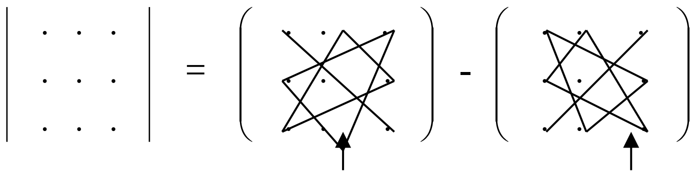
обозначаемым $|A|$**,** называется число, равное

$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) - (a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11})$, т.е.

$$\Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} (a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}) - \\ -(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}). \end{array} \qquad \textbf{(1.6)}$$

? Обратите внимание, что в то время как матрица не имеет численной величины, определитель является числом.

● Для простоты запоминания формулы (1.2) используют правило треугольника, которое проиллюстрировано на рис. 1.1



«тройки» произведений по главной диагонали   «тройки» произведений по побочной диагонали

Рис.1.1. Схема правила треугольника

Основные свойства определителей

1^0. Определитель транспонированной матрицы A^T является тем же самым, что и определитель самой матрицы A.

2^0. При перестановке двух столбцов или строк в матрице A изменяется знак определителя $|A|$.

3^0. Определитель $|A|$ равен нулю, если произвольные две строки или два столбца матрицы А являются одинаковыми или пропорциональными.

4^0. Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) матрицы A на число λ приводит к умножению определителя $|A|$ на число λ.

5^0. Прибавление k – ой строки, умноженной на число λ, к i – ой строке ($i \neq k$) или прибавление k – ого столбца, умноженного на число λ, к i – ому столбцу ($i \neq k$) в матрице A не меняет величины определителя $|A|$.

Определение 1.7. **Минором M_{ij} элемента a_{ij}** определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием из исходного определителя той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Пример. Пусть дан определитель третьего порядка:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Тогда минор к элементу $a_{23}=5$ (стоящему во второй строке и в третьем столбце) находится так: $M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=1\cdot(-3)-2\cdot 6=-15$.

А минор к элементу $a_{31}=\boxed{?}$ (стоящему в $\boxed{?}$ строке и $\boxed{?}$ столбце) находится так:

$M_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-3\cdot 4=\boxed{??}$.

Определение 1.8. **Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij}** определителя n-го порядка называется соответствующий минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$Aij=(-1)^{i-j}\cdot Mij \qquad \textbf{(1.7)}$$

Пример. Для определителя из предыдущего примера найдем алгебраические дополнения к элементу a_{23} (т.е. A_{23}) и к элементу a_{31} (т.е. A_{31}). По формуле (1.7) получаем:

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=(-1)^5\cdot(-15)=-1\cdot(-15)=15;$$

$$A_{31}=(-1)^{??\,+\,??}\cdot M_{31}=(-1)^4\cdot(-2)=\boxed{??}.$$

● Определитель матрицы n-го порядка определяется более сложным образом и может быть вычислен по теореме Лапласа путем последовательного понижения порядка.

Теорема Лапласа. Определитель матрицы равен сумме произведений любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\boxed{|\grave{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{is} \cdot A_{is}} \quad \mathbf{(1.8)} \qquad\qquad \boxed{|A| = \sum_{s=1}^{n} a_{is} \cdot A_{is}} \quad \mathbf{(1.9)}$$

● Представление определителя по теореме Лапласа в форме (1.8) *называют разложением определителя* по s-му столбцу, а в форме (1.9) – по i-ой строке.

• Общий вид определителя матрицы n – го порядка:

$$|\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Определение 1.9. Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если её определитель отличен от нуля, т.е. $|A| \neq 0$.

Системы линейных уравнений. Некоторые понятия

Определение 1.10. **Системой уравнений** называется конечное множество уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \qquad \mathbf{(1.10)}$$

Определение 1.11. **Решением** системы с n переменными (1.10) называют упорядоченный набор чисел ($x_1, x_2, \dots, x_n$), являющийся решением каждого из уравнений, входящих в систему.

Определение 1.12. Два уравнения или две системы уравнений называются **равносильными**, если имеют одно и то же множество решений.

Равносильные преобразования систем уравнений:

1^0. *Правило замены уравнения на равносильное*: если в системе заменить уравнение на равносильное, то получим систему, равносильную данной.

2^0. *Правило подстановки*: если из одного уравнения системы выразить одну переменную через остальные и, используя это выражение, заменить её во всех остальных уравнениях системы, то получим систему, равносильную первоначальной.

3^0. *Правило сложения*: если любое уравнение системы заменить на уравнение, полученное при его сложении с любым другим уравнением системы, то получим систему, равносильную первоначальной.

4^0. *Правило умножения*: если обе части уравнения умножить на выражение с переменными входящими в уравнение, то получим уравнение являющееся следствием исходного; если же это выражение обращается в нуль, то полученное уравнение будет равносильно исходному.

Определение 1.13. **Системой *n* линейных уравнений с *n* переменными** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют систему вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad \textbf{(1.11)}$$

Определение 1.14. Система линейных уравнений (1.11) называется **однородной системой**, если в её правой части стоят только нули (b_i=0, $i = \overline{1;n}$).

Определение 1.15. Система линейных уравнений (1.11) называется **неоднородной системой**, если хотя бы одно из чисел b_i ($i = \overline{1;n}$), стоящих в её правой части, не равно нулю.

- В **матричной форме** система (1.11) имеет вид:

$$AX = B, \quad \textbf{(1.12)}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \text{ матрица системы ;} \qquad \textbf{(1.13)}$$

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{матрица} - \text{столбец свободных членов ;} \qquad \textbf{(1.14)}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{матрица} - \text{столбец неизвестных .} \qquad \textbf{(1.15)}$$

- **Расширенной матрицей** системы уравнений (1.11) называется матрица вида:

$$A|B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(1.16)}$$

Решение систем линейных уравнений по правилу Крамера

Если матрица A системы (1.11) невырожденная, то данная система уравнений имеет единственное решение, которое можно вычислить по правилу Крамера.

Правило Крамера. Для нахождения значений x_i $(i=\overline{1;n})$ системы n линейных уравнений с n переменными следует разделить на определитель $|A|$ определитель, полученный из матрицы системы A заменой её i– го столбца на столбец свободных членов B.

Отсюда:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\; x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\quad \ldots;\; x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}. \qquad \textbf{(1.17)}$$

Здесь обозначили:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}; \ldots; \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

- Формулы (1.17) называются **формулами Крамера**.
- Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{12}z = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \qquad \textbf{(1.18)}$$

Для системы вида (1.18) формулы Крамера примут вид:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta};\quad y = \frac{\Delta y}{\Delta};\quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}, \qquad \textbf{(1.19)}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

$\boxed{?}$ При каком условии система уравнений (1.18) имеет единственное решение?

$\boxed{?}$ Записать формулы Крамера для решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод последовательного исключения переменных (*метод Гаусса*) является общим способом решения систем линейных уравнений.

Метод Гаусса состоит из *прямого* и *обратного хода*.

I. Прямой ход метода Гаусса – заданную систему с *помощью равносильных преобразований систем уравнений* приводят к ступенчатому виду. Так как все преобразования над системой уравнений (1.11) сводятся к соответствующим преобразованиям над расширенной матрицей системы (см. *Элементарные преобразования матриц*), то прямой ход метода Гаусса можно выполнять так:

1. Привести заданную систему уравнений к виду (1.11).

2. Для заданной системы записать расширенную матрицу $A \mid B$.

3. С помощью элементарных преобразований матриц привести расширенную матрицу системы $A \mid B$ к ступенчатому виду.

II. **Обратный ход метода Гаусса:**

1. По полученной ступенчатой матрице (см. пункт 3 прямого хода метода Гаусса) записать новую систему уравнений, равносильную первоначальной.

? – почему система уравнений, «восстановленная» по ступенчатой матрице равносильна исходной системе?

2. Решить полученную ступенчатую систему уравнений, последовательно «поднимаясь наверх» по системе от последнего уравнения (содержащего только одну переменную) к первому уравнению.

1.2. Примеры решения типовых задач

Задача 1.1. Вычислить определители квадратных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Найдем определитель квадратной матрицы второго порядка A по формуле (1.5): $\Delta_2 = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = \boxed{??}$.

2) Определитель квадратной матрицы третьего порядка B вычислим по формуле (1.6):

$$\Delta_3 = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} = (1\cdot2\cdot6+4\cdot5\cdot9+3\cdot8\cdot7) - (9\cdot2\cdot7+8\cdot5\cdot1+3\cdot4\cdot6) = 360 - 238 = 122.$$

Ответ. $|A| = \boxed{??}$;

$|B| = 122.$

Задача 1.2. Вычислить определитель матрицы B (см. задачу 1.1.), используя его разложение по элементам:

а) первой стройки; б) третьего столбца.

Решение.

а) По теореме Лапласа *разложение по первой строке* определителя матрицы В имеет вид: $|B| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ (*) (в формуле (1.9) взяли i =1).

Здесь a_{11} =1; a_{12} =4; a_{13} =7; A_{11}, A_{12}, A_{13} – алгебраические дополнения к элементам первой строки. Вычислим требуемые алгебраические дополнения, используя формулу (1.7) и определение 1.8:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 12 - \boxed{??} = -28;$$

$$A_{21} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 27, \quad A_{31} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 6.$$

Подставим найденные значения в выражение (*):

$$|B| = 1 + (-28) + 4 \cdot 27 + 7 \cdot 6 = 122.$$

б) Если формуле (1.8) взять s=3, то получим *разложение определителя по третьему столбцу*:

$|B| = a_{13}\ A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$. (**) (Здесь a_{13}= $\boxed{??}$; a_{23}=5; a_{33}= $\boxed{??}$). Найдем, используя определение 1.8, требуемые в выражении (**) алгебраические дополнения:

$$A_{13} = (-1)^{4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = \boxed{??}, \quad A_{23} = (-1)^{5} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = \boxed{??}, \quad A_{33} = (-1)^{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{??}.$$

Поставим найденные значения алгебраических дополнений в выражение (**): $|B| = 7 \cdot \boxed{??} + 5 \cdot \boxed{??} + 6 \cdot \boxed{??} = 122$.

$\boxed{!}$ Сравните полученные ответы для определителя матрицы B в задачах 1.1. и 1.2 (а,б) — они должны совпадать.

Ответ. $\Delta_3 = |B| = 122$.

Задача 1.3. Вычислить определитель матрицы B (см. задачу1.1.) предварительно преобразовав с целью получения двух нулей:

а) в первом столбце; б) в первой строке.

Решение.

а) С помощью преобразований исходного определителя матрицы B, основанных на применении основных свойств определителей, получим два нуля в первом столбце (на месте элементов a_{21}=3 и a_{31}=9). Для чего сначала из второй строки вычтем первую, умноженную, на 3.

$\boxed{!}$ Согласно свойству 5^0 определителя, его величина от данного преобразования не изменяется.

В результате получим:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3-1\bullet 3 & 2-4\bullet 3 & 5-7\bullet 5 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -10 & -16 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} \quad =$$

$\boxed{!}$Значок $=$ означает, что решение примера будет продолжено ниже (после комментариев).

Видим, что выполненное действие позволило преобразовать элемент a_{21}=3 в ноль.

Далее для получения нуля на месте a_{31}=9 из третьей строки вычтем первую строку, умноженную на 9:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -10 & -16 \\ 9-1\bullet 9 & 8-4\bullet 9 & 6-7\bullet 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -10 & -16 \\ 0 & -28 & -57 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, получили в первом столбце заданного определителя два нуля. Теперь, применяя теорему Лапласа (формула (1.4) при s=1) , получим:

$|B| = a_{11}{\cdot}A_{11} + a_{21}{\cdot}A_{21} + a_{31}{\cdot}A_{31} = 1{\cdot}A_{11} + 0{\cdot}A_{2\,1} + 0{\cdot}A_{3\,1} = 1{\cdot}A_{11} = 1.\ (-1)^{1+1}\cdot$

$M_{11}=1\cdot(-1)^2\cdot \begin{vmatrix} -10 & -16 \\ -28 & -57 \end{vmatrix}$ = - 10· (57) - (-16) · (-28) = 570 - 448 = 122.

б) Получим два нуля в первой строке определителя:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4-1\bullet 4 & 7-1\bullet 7 \\ 3 & 2-3\bullet 4 & 5-3\bullet 7 \\ 9 & 8-9\bullet 4 & 6-9\bullet 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & -16 \\ 9 & -28 & -57 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} =$$

$$=1\cdot(-1)^2\cdot M_{11} = 1\cdot \begin{vmatrix} -10 & -16 \\ -28 & -57 \end{vmatrix} = 570 - 448 = 122.$$

Ответ.122.

Задача 1.4. Вычислить определитель матрицы четвертого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

С помощью преобразований, основанных на свойствах определителя, получим три нуля в какой-либо строке или столбце определителя. В данном случае «занулять» удобно первый, второй, третий, четвертый элементы третьего столбца.

$\boxed{?}$ Почему «занулять» лучше именно элементы третьего столбца?

$$\Delta_4 = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ -4 & 6 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 3 & -6 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ -4+2 & 6-5 & -1+1 & 4+3 \\ 5-2\bullet 2 & -9-(-5)\bullet 2 & 2-1\bullet 2 & 7-3\bullet 2 \\ 3-2 & -6+5 & 1-1 & -3-3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot (-1)^{1+3}\cdot A_{13} = 1\cdot M_{13} = 1\cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} \quad =$$

Таким образом, порядок определителя четвертого порядка понизили на единицу, т.е. до третьего порядка.

Полученный определитель третьего порядка можно найти разложением по какой-либо строке (столбцу) или по правилу треугольника.

В нашем случае удобно сначала получить два нуля во второй строке, а затем вычислить определитель, разложив его по второй строке:

$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1+2 & 7+2 \\ 1 & 1-1 & 1-1 \\ 1 & -1-1 & -6-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot (-1)^{2+1}\cdot M_{21} =$$

$$= 1 - (-1)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = -(3\cdot(-7) - 9\cdot(-2)) = -(-21+18) = 3.$$

Ответ. 3.

Задача 1.5. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 10 млн условных единиц. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 60%, второго – на 45%. В результате суммарная прибыль должна возрасти в 1,5 раза. Какова величина прибыли каждого из отделений: а) в прошлом году; б) в этом году?

Решение.

1.Составим систему уравнений для решения задачи.

Пусть x – величина прибыли первого отделения фирмы в прошлом году (млн условных единиц), y – величина прибыли второго отделения (млн условных единиц).

Тогда условие задачи можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} x + y = 10; \\ 1{,}6x + 1{,}45y = 15. \end{cases}$$

2. Решим полученную систему по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta y}{y},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1{,}6 & 1{,}45 \end{vmatrix} = 1{,}45 - 1{,}6 = -0{,}15$; $\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 15 & 1{,}45 \end{vmatrix} = -0{,}5$; $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1{,}6 & 15 \end{vmatrix} = -1.$

Тогда $x = \dfrac{-0{,}5}{-0{,}15} = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}333$; $\quad y = \dfrac{-1}{-0{,}15} = \dfrac{30}{3} \approx 6{,}667$.

Значит, в прошлом году прибыль составила для первого отделения 3,333, а для второго – 6,667 млн условных единиц.

3. Определим величину прибыли каждого из отделений фирмы в этом году: для первого отделения: $1{,}6 \cdot 3{,}333 \approx 5{,}333$; для второго отделения: $1{,}45 \cdot 6{,}667$ $\approx 9{,}667$ млн условных единиц.

Ответ.

а) 3,333 млн усл.ед.; 6,667 млн усл.ед.,

б) 5,333 млн усл.ед.; 9,667 млн усл.ед.

Задача 1.6. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение.

Формулы Крамера (1.19) для данной системы имеют вид:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta},$$

где: $\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 38 & 5 & 0 \\ 128 & 17 & 0 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \bullet (-1)^6 \bullet \begin{vmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 12 & 8 & 17 \\ & & \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow \Delta x_1 = 6;$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -14 & 11 \end{vmatrix} = 1 \bullet (-1)^2 \bullet \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -14 & 11 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \Delta x_2 = 2;$$

$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = \boxed{??} = -2$. Тогда получаем:

$$x_1 = \frac{6}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{2}{2} = 1; \quad x_3 = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ответ. (3; 1; -1).

Задача 1.7. Решить методом Гаусса системы уравнений:

1. $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5; \\ 3x + y - 5z = 4; \\ 4x - 2y - 3z = 10; \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + \ y - z \ = 4; \\ 3x - 2y + z = 2; \\ 10y - 5x - 10 = 7z; \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12; \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

Решение.

1. а) Запишем расширенную матрицу системы, приписав к матрице коэффициентов вектор свободных членов:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right).$$

б) С помощью *элементарных преобразований матриц* приведем матрицу $A \mid B$ к ступенчатому виду:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 4 \\ 4 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \overset{\textbf{1–й шаг}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 3-1\cdot 3 & 1-(-3)\cdot 3 & -5-2\cdot 3 & 4-5\cdot 3 \\ 4-1\cdot 4 & -2-(-3)\cdot 4 & -3-2\cdot 4 & 10-5\cdot 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & -11 & -11 \\ 0 & 10 & -11 & 1 \end{array}\right) \overset{\textbf{2–й шаг}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & -11 & -11 \\ 0 & 10-10 & -11-(-11) & 1-(-11) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right).$$

Прокомментируем выполненные преобразования:

1– *й шаг*: умножаем элементы первой строки на (–3) и (– 4) и прибавляем их соответственно к элементам второй и третьей строк. В результате получим в первом столбце все нули, кроме верхнего элемента (a_{11}=1), т.е. в первом столбце образовалась «ступенька» из нулей.

2 – *й шаг*: к элементам третьей строки прибавляем соответствующие элементы второй строки, умноженные на (–1).

Замечаем, что последняя строка соответствует уравнению $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 12,$ которое не имеет решений, следовательно, система несовместна (т.е. не имеет решений).

2. а) Преобразуем заданную систему:

$$\begin{cases} x + y - z = 4; \\ 3x - 2y + z = 2; \\ -5x + 10y - 7z = 10. \end{cases}$$

б) Запишем расширенную матрицу системы:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & -7 & 10 \end{array}\right).$$

в) Приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -5 & 10 & -7 & 10 \end{array}\right) \overset{\textbf{1–й шаг}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 3-1\cdot 3 & -2-1\cdot 3 & 1+1\cdot 3 & 2-4\cdot 3 \\ -5+1\cdot 5 & 10+1\cdot 5 & -7-1\cdot 5 & 10+4\cdot 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & -10 \\ 0 & 15 & -12 & 30 \end{array}\right) \overset{\textbf{2–й шаг}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 4 & -10 \\ 0 & 15-5\cdot 3 & -12+4\cdot 3 & 30-10\cdot 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Прокомментируем выполненные преобразования:

1– *й шаг*: умножаем элементы первой строки на (–3) и прибавляем их соответственно к элементам второй и третьей строк. В результате получим в первом столбце все нули, кроме верхнего элемента (a_{11}=1), т.е. в первом столбце образовалась «ступенька» из нулей.

2 – *й шаг*: к элементам третьей строки прибавляем соответствующие элементы второй строки, умноженные на 3.

Замечаем, что последняя строка преобразованной расширенной матрицы соответствует уравнению $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0,$

которое имеет бесчисленное множество решений, значит, и система имеет бесконечное множество решений.

3. а) Расширенная матрица системы имеет вид:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

б) Приведем матрицу $A \mid B$ к ступенчатому виду:

$$A|B \overset{\textbf{1–й шаг}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{\textbf{2–й шаг}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & -3 & 4 & 12 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{\textbf{3–й шаг}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\textbf{4–й шаг}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)\overset{\textbf{5–й шаг}}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2\end{array}\right)\overset{\textbf{6–й шаг}}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2\end{array}\right).$$

Прокомментируем выполненные действия:

1– *й шаг*: меняем местами первую и четвертую строки.

2– *й шаг*: чтобы на место элемента a_{11} получить единицу (с которой более удобно вести все дальнейшие расчеты) вычтем из элементов первой строки соответствующие элементы четвёртой строки.

3– *й шаг*: умножаем элементы первой строки на (– 4) , (– 8) и (– 3) и прибавляем их соответственно к элементам второй, третьей и четвёртой строк. В результате получим в первом столбце все нули, кроме верхнего элемента (a_{11}=1), т.е. в первом столбце образовалась «ступенька» из нулей.

4 – *й шаг*: к элементам третьей строки прибавляем соответствующие элементы второй строки, умноженные на (–3). Тогда и под элементом a_{22}= – 1 во втором столбце появится вторая ступенька.

5– *й шаг*: меняем местами третью и четвёртую строки с тем, чтобы на месте элемента a_{33} стояла единица (для удобства расчётов на следующем шаге).

6– *й шаг*: к элементам четвёртой строки прибавляем соответствующие элементы третьей строки, умноженные на 4. Таким образом матрица приведена к ступенчатому виду.

в) По полученной ступенчатой матрице выпишем систему уравнений, равносильную исходной системе:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + \ x_4 \ = \ \ 2; \\ \quad 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2; \\ \qquad\quad x_3 - \quad x_4 = 10; \\ \qquad\qquad\quad -2x_4 = \ \ 2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения $x_4 = -1$; из предпоследнего x_3 ?? ;

Из второго – ?? $=1$; из первого уравнения – x_1 ??

Ответ. **1.** $\{\varnothing\}$;**2**. бесчисленное множество решений; **3**. (1;1;– 1;– 1).

1.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить определители квадратных матриц второго порядка:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & a \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель квадратной матрицы третьего порядка, используя

правило треугольника: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Дан определитель третьего порядка $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Требуется:

а) вычислить Δ_3, разложив по элементам первого столбца;

б) вычислить Δ_3, разложив по элементам третьей строки;

в) вычислить Δ_3, предварительно получив во второй строке два нуля;

г) вычислить Δ_3, предварительно получив в третьем столбце два нуля;

д) найти сумму произведений элементов второго столбца на соответствующие алгебраические дополнения к элементам первого столбца.

4. Упростить и вычислить определители а) $\begin{vmatrix} 35436 & 46343 & 22429 \\ 17718 & 23169 & 11211 \\ 5906 & 7729 & 3732 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$.

5. Вычислить определители четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

6. Решить системы уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса. Сделать проверку.

а) $\begin{cases} 3x-4y=-6, \\ 3x+4y=18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+_3=6, \\ 2x_1-x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2+x_3=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-x_2+2x_3-x_4=-1, \\ 2x_1-2x_2+3x_3=5, \\ 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=-3; \end{cases}$

---

7. Вычислить определители квадратных матриц второго порядка:

а) $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -11 \\ 7 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

8. Дан определитель третьего порядка:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

а) Требуется вычислитель Δ_3:

● по правилу треугольника;

●предварительно преобразовав его с целью получения двух нулей в первой строке;

●разложив по третьему столбцу.

б) Найти сумму произведений элементов первого столбца на алгебраические дополнения к элементам третьего столбца.

9. Упростить (по свойствам определителей) и вычислить:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 12314 & 16536 & 20538 \\ 6157 & 8268 & 10268 \\ 513 & 689 & 126 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

10. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} x+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix} > -1$.

11. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & x+5 \end{vmatrix} = 0.$

12. Решить системы уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса. Сделать проверку:

а) $\begin{cases} 6x + 7y + 13 = 0; \\ -19y + 5x - 14 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y + 3z = -9; \\ 8x + 3y + 5z = -13; \\ 2x + 5y - z = -5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9; \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18; \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5; \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$

13. Определитель системы трех линейных уравнений с тремя переменными x_1, x_2, x_3 имеет вид: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Требуется: а) составить соответствующую систему уравнений при $b_1 = 2$, $b_2 = -2$, $b_3 = 1$; б) решить полученную систему уравнений.

---

14. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5^{\ln 4} & 2^{\cos^2 x} \\ 2^{\sin^2 x} & 0{,}2^{\ln 4} \end{vmatrix}$

15. Вычислить определители третьего порядка по правилу треугольника:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -11 & \frac{1}{2} \\ 7 & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & 5 & 0 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}3 \\ 1 & 2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$.

16. Вычислить определители третьего порядка с помощью разложения по строке или столбцу:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

17. Не вычисляя, определить величину определителя:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

18. Вычислить определители, используя их свойства:

а) $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\rho & 1 & \cos^2\rho \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 13647 & 13657 & 17844 \\ 28423 & 28433 & -19371 \\ 28423 & 28433 & -19372 \end{vmatrix}$.

19. Решить неравенства: а) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$; б) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 1 \\ 7x & 2 \end{vmatrix} > 5$.

20. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix}=0$; б) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix}=0$; в) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$;

г) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix}$=0; д) $\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$=0; е) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & x & 2-x \end{vmatrix}$=0; з) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$=0.

21. Доказать тождества:

а) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$=(b-a) · (c-) · (c-b), б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$=(b-a) · (c-a)· (c-b).

22. Доказать (на примере определителя третьего порядка), что если все элементы одной строки (столбца) определителя равны 1, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

23. Используя свойства определителей, проверить верны ли равенства:

а) $\begin{vmatrix} \beta b_1 + \rho c_1 & b_1 & c_1 \\ \beta b_2 + \rho c_2 & b_2 & c_2 \\ \beta b_3 + \rho c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$=0; б) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$=2·$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix}$ = -2x.

24. Проверить, делится ли определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ на *(x-y), (y-z), (z-x).*

25. Решить системы линейных уравнений по формулам Крамера. Сделать проверку:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + 2z = -1; \\ 2x - y + 2z = -4; \\ 4x + y + 4z = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3u + 2v + w = 5; \\ 2u + 3v + w = 1; \\ 2u + v + 3w = 11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 31 = 0; \\ x_2 + 5x_1 + 2x_3 - 29 = 0; \\ x_3 - x_2 + 3x_1 - 10 = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x + y - z = 2; \\ 3x + y - 2z = 3; \\ x \quad + z = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} y + 3z = -1; \\ 2x + 3y + 5z = 3; \\ 3x + 5y + 3z = 6; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha - \cos\beta = 0; \\ x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha - \sin\beta = 0. \end{cases}$

26. Вычислить определители четвертого порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

г) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

27. Вычислить определитель $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & \alpha \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

разлагая его по элементам третьей строки.

28. Вычислить определитель $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$,

разлагая его по элементам четвертого столбца.

29. Вычислить определитель матрицы четвертого порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

30. Решить системы уравнений по формулам Крамера и методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4; \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20; \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17; \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 10; \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 22; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 11; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2; \\ -3x_1 - 7x_2 - 8x_3 + 2x_4 = -4; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4; \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z + u = 16; \\ x + 7y + z + u = 23; \\ 2x + y + 3z + 5u = 10; \\ 4x - 3y + 5z + 6u = 1. \end{cases}$

31. Проверить, что система уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 11x_3 - 13x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0; \\ 13x_1 - 25x_2 + x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

имеет решение (1;1;1;1) и вычислить определитель этой системы.

32. а) Вычислить определитель пятого порядка

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

б) Составить систему уравнений, для которой Δ_5 есть определитель системы, а столбец (транспонированный) свободных членов следующий: $B = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)$; в) вычислить x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и сделать проверку.

33. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн руб. На этот год запланирован рост прибыли первого отделения на 70%, второго– на 40%. В результате суммарная прибыль должна вырасти в 1,5 раза. Какова величина прибыли каждого из отделений:

а) в минувшем году;

б) в этом году?

Тест 1

1. Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ равен:

а) $|A| = -10$;   б) $|A| = 10$;

в) $|A| = 4$;   г) $|A| = 0$.

2. При перестановке двух строк матрицы определитель этой матрицы:

а) увеличивается на 1;   б) уменьшается на 1;

в) меняет знак;   г) не меняется.

3. Определитель матрицы $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ равен:

а) 2;   б) 4;   в) -6;   г) –3.

4. Совокупность $m \times n$ действительных чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, где m – число строк, n – число столбцов $(m \neq n)$ матрицы, называется:

а) квадратной матрицей;   б) диагональной матрицей;

в) единичной матрицей;   г) прямоугольной матрицей.

5. По формулам Крамера решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1; \\ -3x_1 + x_3 = -2; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

В ответе указать значение переменных x_1, x_2 и определителя Δ_3.

6. Если в квадратной матрице все её элементы, стоящие ниже и выше главной диагонали равны нулю, а на главной диагонали стоят любые ненулевые числа то эта матрица называется:

а) нулевой;

б) единичной;

в) прямоугольной;

г) диагональной.

7. В матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ главную диагональ составляют элементы: а) 4; 0; 0; 5; б) 2; -1; 0; -1;

в) 2; 5; -8; 4; г) 5; 7; 6; -1.

8. Найти соответствие между утверждениями:

1) Если две строки матрицы пропорциональны, то определитель этой матрицы	а) не изменяется;
2) Если матрицу протранспонировать, то её определитель	б) равен нулю;
3) При перестановке двух столбцов матрицы её определитель	в) изменит знак .

9. Связь между минором M_{ij} и алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} выражается равенством:

а) $M_{ij} = A_{ij}$; б) $A_{ij} = \pm M_{ij}$;

в) $A_{ij} = (-1)^{i-j} \cdot M_{ij}$; г) $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

10. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными x, y, z имеет единственное решение, если:

а) определитель системы $\Delta=0$; б) определитель системы $\Delta\neq 0$;

в) $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$; г) $\Delta\neq 0$ и $\Delta_x\neq 0$, и $\Delta_y\neq 0$, и $\Delta_z\neq 0$.

11. Минор M_{13} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -5 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен …

12. Разложение определителя $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

1) по первой строке	а) $\Delta=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$;
2) по первому столбцу	б) $\Delta=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}$;
3) по второй строке	в) $\Delta=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$;

4) по второму столбцу | г) $\Delta=A_{12}\,a_{12}+A_{22}\,a_{22}+A_{32}\,a_{32}$;
5) по третьей строке | д) $\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$;
6) по третьему столбцу | е) $\Delta=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$.

13. Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ называется:

а) таблица; б) число $|A| = ad - bc$; в) число $|A| = b - ad$;

г) число $|A| = a - bd$.

14. Если минор $M_{12}=4$, то соответствующее алгебраическое дополнение A_{12} ?

15. Формулы Крамера для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y имеют вид:

а) $x = \Delta x$; $y = \Delta y$; б) $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$; $x = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$; в) $x = \dfrac{\Delta}{\Delta y}$; $x = \dfrac{\Delta}{\Delta x}$; г) $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$; $x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Вопросы для самопроверки по теме «Определители матриц. Решение систем линейных уравнений»

1. Понятие матрицы, виды матриц.

2. Действия над матрицами.

3. Элементарные преобразования матриц.

4. Определители матриц второго порядка: определение и правило вычисления.

5. Определители матриц третьего порядка: определение и правило вычисления.

6.Понятие об определителе матрицы n-го порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Разложение определителя по строке или по столбцу.

7. Основные свойства определителей.

8. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера:

а) для системы двух уравнений, содержащей две переменные;

б) для системы трех уравнений, содержащей три переменные;

в) для системы n уравнений, содержащей n переменных.

9. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

2.1. Необходимый теоретический минимум

Основные понятия

Определение 2.1. **Геометрическим вектором** или просто **вектором** называется направленный отрезок.

Определение 2.2. **Длиной (модулем) вектора** называется число, равное длине отрезка, изображающего вектор.

- Обозначают вектор двумя буквами с чертой и стрелкой над ними, причём первая буква указывает начало вектора, а вторая – его конец. Также вектор может быть обозначен одной буквой латинского алфавита, т.е.: $\overline{a} = \overline{AB}$, где точка A – начало вектора, B – конец вектора (рис. 2.1).
- Обозначение длины (модуля) вектора: $|\overline{a}| = |\overline{AB}|$

Виды векторов:

1. **Коллинеарные** – это векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых (рис. 2.2).
2. **Компланарные** – это векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях.
3. **Равные** – это коллинеарные, имеющие одинаковые длины и направленные в одну сторону векторы (рис.2.3).
4. **Противоположные** – это коллинеарные, имеющие одинаковые длины и направленные в разные стороны векторы (рис. 2.4).
5. **Нулевой** - это вектор, начало которого совпадает с его концом.
6. **Орт вектора** - это вектор, имеющий единичную длину и совпадающий по направлению с данным вектором (рис. 2.5).

● Орт вектора $\overline{a}$ обозначают $\vec{r}_0$.

● Справедливо равенство: $\vec{r} = \overline{a_0} \cdot |\overline{a}|$.

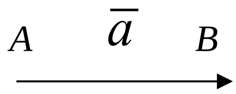


Рис. 2.1

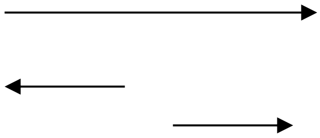


Рис. 2.2

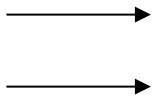


Рис. 2.3

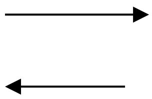


Рис. 2.4

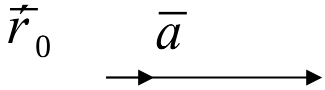


Рис. 2.5

Действия над векторами:

1. **Сложение двух векторов** $\bar{a}$ и $\bar{b}$ осуществляется *по правилу треугольника* (рис. 2.6) или по *правилу параллелограмма* (рис. 2.7).

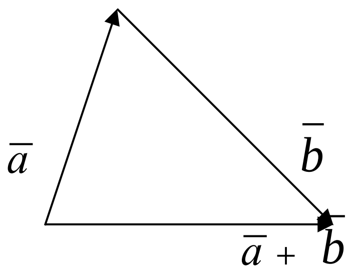


Рис. 2.6

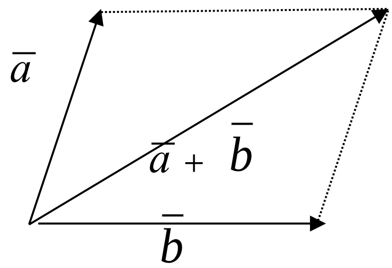


Рис. 2.7

2. **Сложение нескольких** (более чем двух) векторов выполняется по *правилу многоугольника* (рис. 2.8).

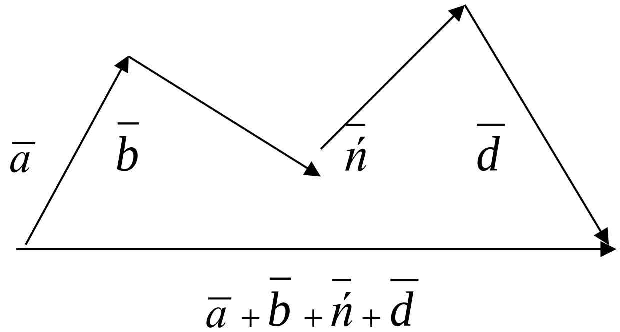


Рис. 2.8

3.**Вычитание двух векторов** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется как действие, обратное сложению (рис. 2.9).

- Вычитание двух векторов можно осуществлять посредством сложения так: $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b})$, где $(-\overline{b})$ – вектор, противоположный вектору $\overline{b}$ (рис. 2.10).

4. При **умножении** вектора $\overline{a}$ на число k получается вектор $\overline{b}$, коллинеарный с вектором $\overline{a}$ и имеющий длину в k раз больше, чем $|\overline{a}|$. Этот новый вектор $\overline{b}$ имеет одинаковое направление с вектором $\overline{a}$, если $k > 0$, и противоположное – если $k < 0$ (рис. 2. 11).

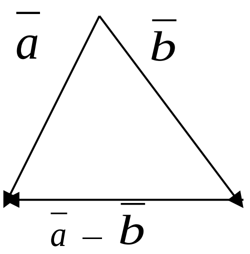


Рис. 2.9

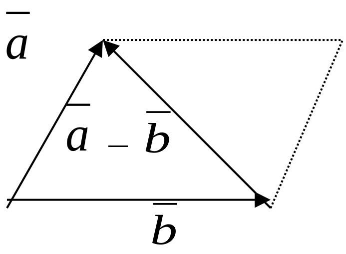


Рис. 2.10

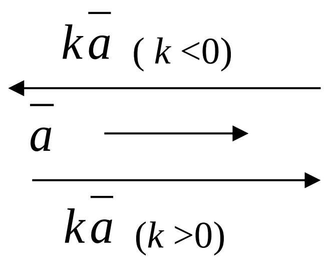


Рис. 2.11

Проекция вектора на ось

Определение 2.3. **Составляющей вектора** $\overline{AB}$ **по оси *l*** называется вектор $\overline{A_1B_1}$, начало которого есть проекция точки, а конец – проекция точки B (рис. 2.12, 2.13).

- Обозначение составляющей вектора $\overline{AB} = \overline{a}$ на ось l : $cocm_{\ell}\overline{a}$ или $cocm_{\ell}\overline{AB}$.

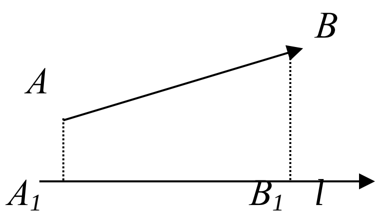


Рис. 2.12

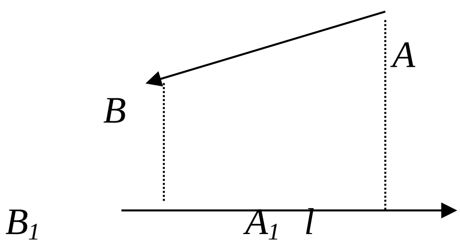


Рис. 2.13

● На рис. 2.12 показан случай, когда направление оси совпадает с направлением составляющей, а на рис. 2.13 – когда направление оси противоположно направлению составляющей.

Определение 2.4. **Проекцией вектора на ось** называется число, равное длине составляющей по этой же оси, взятое со знаком плюс, если направления оси и составляющей совпадают и со знаком минус, если эти направления противоположны:

$$пр_l\bar{a} = \begin{cases} /\,сост_l\,\overline{a}\,/, \text{ если направления } \bar{a} \text{ и } l \text{ совпадают;} \\ -/\,сост_l\,\overline{a}\,/, \text{ если направления } \bar{a} \text{ и } l \text{ противоположны.} \end{cases} \quad \textbf{(2.1)}$$

- Обозначение проекции вектора $\overline{AB} = \bar{a}$ на ось l:

$$пр_l\,\overline{AB} \quad \text{или} \quad пр_l\,\bar{a}\,.$$

***Свойства проекции вектора на ось*:**

1^0. $пр_l\,\bar{a} = |\bar{a}|\cdot\cos\left(\widehat{\bar{a};l}\right)$;

2^0. $пр_l\left(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n\right) = пр_l\,\bar{a}_1 + пр_l\,\bar{a}_2 + \ldots + пр_l\,\bar{a}_n$;

3^0. $пр_l k\bar{a} = k\cdot пр_l\,\bar{a}$ (k = const);

4^0. $сост_l\ \bar{a} = l_0\ пр_l\,\bar{a}$ (где l_0 – орт оси l);

5^0. если $\bar{a}\perp l$, то $пр_l\,\bar{a}$ =0.

Теорема 2.1. Любой вектор $\bar{a}$ может быть разложен, и притом единственным образом, по декартову прямоугольному базису $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, т.е. для каждого вектора $\bar{a}$ найдётся, и притом единственная, тройка чисел *x, y, z* такая, что справедливо равенство:

$$\bar{a} = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}\,.$$

- Числа x, y, z называются *декартовыми прямоугольными координатами* вектора $\overline{a}$ (или просто *координатами* вектора $\overline{a}$).

Теорема 2.2. Декартовы прямоугольные координаты x, y, z вектора $\overline{a}$ равны проекциям этого вектора на оси OX, OY и OZ соответственно:

$$x = np_{OX}\,\overline{a};\ y = np_{OY}\,\overline{a};\ z = np_{OZ}\,\overline{a}. \qquad \textbf{(2.2)}$$

- Проекции на оси координат вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, где $A\ (x_1, y_1, z_1), B\ (x_2, y_2, z_2)$ равны: $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$. Значит, можно записать: $\overline{a} = (x_2 - x_1)\cdot\overline{i} + (y_2 - y_1)\cdot\overline{j} + (z_2 - z_1)\cdot\overline{k}$.

- Действия над векторами, заданными своими проекциями (координатами) $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

1) *сложение* векторов: $\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;
2) *вычитание* векторов: $\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$;
3) умножение вектора $\overline{a}$ на число k : $k\overline{a} = (kx_1;\ k y_1;\ kz_1)$.

Скалярное произведение векторов

Определение 2.7. **Скалярным произведением двух векторов** называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a};\overline{b}\right). \qquad \textbf{(2.3)}$$

Определение 2.8. **Скалярным произведением двух векторов** называется число, равное произведению длины одного из них на проекцию другого вектора по направлению первого:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b} = \left|\overline{b}\right|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}. \qquad \textbf{(2.4)}$$

- Из определения 2.8 следуют следующие формулы:

$$np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|}; \quad \textbf{(2.5)} \qquad np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}. \quad \textbf{(2.6)}$$

- Если векторы заданы через координаты в декартовой системе координат $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение определяется как сумма произведений одноименных

координат: $$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 . \quad \textbf{(2.7)}$$

Свойства скалярного произведения:

1^0. Если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ – ненулевые векторы, то $\bar{a} \bullet \bar{b}=0$ только в том случае, если $\bar{a} \perp \bar{b}$.

2^0. Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется переместительный закон, т.е. $\bar{a}\bullet\bar{b} = \bar{b}\bullet\bar{a}$.

3^0. Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняется распределительный закон, т.е. $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c}$.

4^0. Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и числа λ выполняется сочетательный закон относительно числового множителя, т.е. $(\bar{a}\,\bar{b})\lambda = \bar{a}(\bar{b}\lambda)$.

5^0. Для любого вектора $\bar{a}$ справедливо: $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ (скалярный квадрат вектора).

Основные формулы

1. а) Длина вектора $\bar{a} = (x; y; z)$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad \textbf{(2.8)}$$

б) Длина вектора $\overline{AB}$, где $A = (x_1; y_1; z_1)$; $B = (x_2; y_2; z_2)$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad \textbf{(2.9)}$$

2. Направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ =**(**x ;y; z):

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\overline{a}|};; \quad \cos\beta = \frac{y}{|\overline{a}|}; \ \cos\gamma = \frac{z}{|\overline{a}|}. \qquad \textbf{(2.10)}$$

- В формулах (2.10) α – угол наклона вектора $\overline{a}$ к оси OX;

  β – угол наклона вектора $\overline{a}$ к оси $OУ$;

  γ – угол наклона вектора $\overline{a}$ к оси OZ.

3. Связь между направляющими косинусами вектора $\overline{a}$ выражается тождеством:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 . \qquad \textbf{(2.11)}$$

4.Угол φ=($\overline{a}$ ^; $\overline{b}$) между векторами $\overline{a}$ **=** **(**x_1 ;y_1; z_1) и $\overline{b}$ =(x_2 ;y_2; z_2)

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}\cdot\sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}}}. \qquad \textbf{(2.12)}$$

5.Условие параллельности (коллинеарности) векторов $\overline{a}$ **=** **(**x_1 ;y_1; z_1) и $\overline{b}$ =(x_2 ;y_2; z_2):

$$\overline{b} = k\overline{a} \qquad (k \text{ – постоянная}) \qquad \textbf{(2.13)}$$

или

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = k \qquad (k \text{ – постоянная}). \qquad \textbf{(2.14)}$$

6. Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов $\overline{a}$ **=** **(**x_1 ;y_1; z_1) и $\overline{b}$ =(x_2 ;y_2; z_2):

$$\overline{a}\cdot\ \overline{b} = 0 \qquad \textbf{(2.15)}$$

или

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \qquad \textbf{(2.16)}$$

7. Координаты точки M**(**x;y;z) середины вектора $\overline{AB}$, где A**=** **(**x_1;y_1; z_1) и B = (x_2 ;y_2; z_2):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad \textbf{(2.17)}$$

7. Координаты точки $M=(x;y;z)$, делящей вектор $\overline{AB}$ в отношении $\lambda=\dfrac{|\overline{AM}|}{|\overline{MB}|}$

(где $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$):

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad \textbf{(2.18)}$$

2.2. Примеры решения типовых задач

Задача 2.1. В треугольнике ABC вектор $\overline{AB}=\bar{a}$ и вектор $\overline{AC}=\bar{b}$.

Построить следующие векторы : $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$; $\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$; $\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{2}$; $\dfrac{-(\bar{a}+\bar{b})}{2}$.

Решение. Пусть дан треугольник ABC (рис.2.15).

а) При нахождении суммы векторов $\bar{a}+\bar{b}$ будем пользоваться *правилом параллелограмма.* Тогда длина искомого вектора $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ равна половине

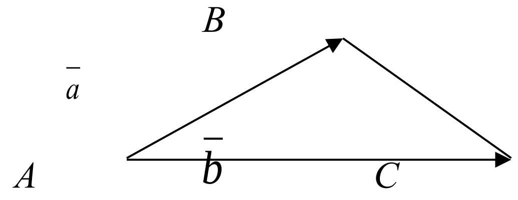


Рис. 2.15

диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 2.16 (а)), т.е. $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}=\overline{AM}$.

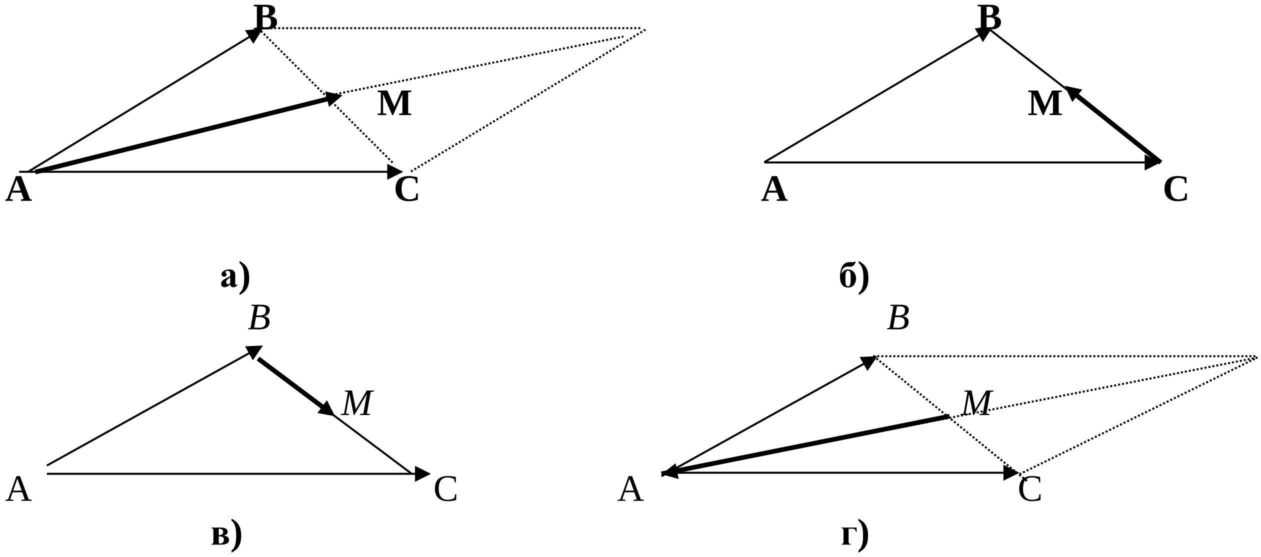


Рис. 2.16

б) Вектор $\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ расположен на стороне BC заданного треугольника с началом в точке C и с концом в точке M – середине стороны AB (рис. 2.16(б)), т.е. $\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}=\overline{CM}$.

в) Вектор $\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{2}=\dfrac{-(\bar{a}-\bar{b})}{2}$, т.е. он равен по длине вектору, построенному в пункте (б) данной задачи, но противоположно направлен, т.е. его началом является точка B, а концом – точка M (рис. 2.16(в)). Поэтому $\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{2}=\overline{BM}$.

г) Вектор $\dfrac{-(\bar{a}+\bar{b})}{2}$ равен по длине вектору, полученному в пункте (а) данной задачи, но противоположно направлен, т.е. его начало находится в точке M, а конец – в точке A (рис. 2.16 (г)). Итак,

$$\frac{-(\bar{a}+\bar{b})}{2}=\overline{MA}.$$

Ответ. Рис. 2.16 (а, б, в, г).

Задача 2.2. Даны векторы $\bar{a}$ =(3;-1), $\bar{b}$ =(1;-2), $\bar{c}$ = (-1;7).

I. Найти: 1) координаты вектора $\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$;

2) длины векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{d}$;

3) скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

4) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

II. Разложить вектор $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

1) аналитически; 2) геометрически;

Решение.

I. 1) По правилу сложения векторов, заданных координатами:

$\bar{d}=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ = (x_a+ $x_в$+ x_c; y_a +$y_в$ +y_c)=(3+1 –1; -1-2+7) $\Rightarrow$ $\bar{d}$ =(3;4).

2) Длины векторов $\bar{a}$; $\bar{b}$; $\bar{d}$ найдем по формуле (2.8):

$$|\bar{a}|=\sqrt{x_a{}^2+y_a{}^2}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10};$$

$$|\bar{b}|=\sqrt{x_b{}^2+y_b{}^2}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}; \qquad |\bar{d}|=\sqrt{x_d{}^2+y_d{}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

- Т.к. по условию векторы заданы на плоскости *XOY* (а не в пространстве *XOYZ*), то в используемых формулах считаем координату z=0.

3) По формуле (2.7) скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = x_a x_b + y_a y_b = 3\cdot 1 + (-1)\cdot(-2) = 5.$$

4) По формуле (2.12) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется равенством:

$$\cos(\bar{a}\wedge\bar{b}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5}{5\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда: $(\bar{a}\wedge\bar{b}) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^0$.

II. Разложение вектора $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет вид:

$\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b}$ (*), где *x, y* – числовые множители.

1) Определим x и y *аналитически:*

$(3;4) = x(3;-1) + y(1;-2) \Rightarrow (3;4) = (3x;-x) + (y;-y) \Rightarrow$

$$(3;4) = (3x + y;\ -x - 2y) \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 3, \\ -x - 2y = 4. \end{cases}$$

Решим полученную систему по формулам Крамера: $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta y}{\Delta}$,

где $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5;\quad \Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10;\quad \Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$

Тогда $x = \frac{-10}{-5}$=2; $y = \frac{15}{-5}$=3. Подставив найденные x и y в выражение (*), получим искомое разложение: $\underline{\bar{d} = 2\bar{a} - 3\bar{b}}$.

2) Геометрически разложение вектора $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах $2\bar{a}$ и $-3\bar{b}$ (рис. 2.17). *Y*

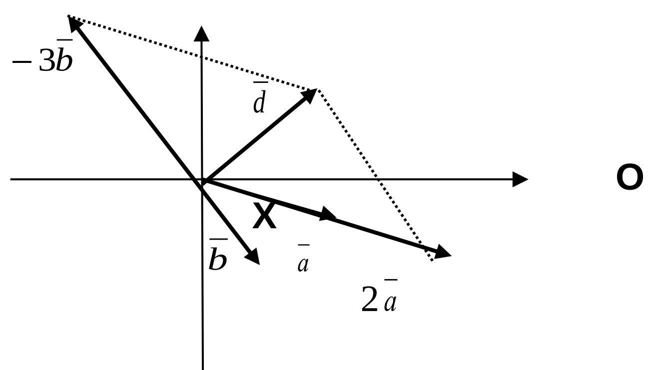


Рис. 2.17

Ответ. I. 1) $\bar{d}$ =(3; 4); 2) $|\bar{a}| = \sqrt{10}$; $|\bar{b}| = \sqrt{5}$; $|\bar{d}|$ =5; 3) $\bar{a}\cdot\bar{b}$ =5;

4) $(\bar{a}\wedge\bar{b}) = 45^0$. II. 1) $\underline{\bar{d} = 2\bar{a} - 3\bar{b}}$; 2) Рис. 2.17.

Задача 2.3 Даны четыре вектора: $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+3\bar{k}$; $\bar{b}=-2\bar{i}+3\bar{j}-2\bar{k}$; $\bar{c}$ = $3\bar{i}-4\bar{j}-5\bar{k}$; $\bar{d}$ $=6\bar{i}+20\bar{j}+6\bar{k}$. Требуется:

1) разложить вектор $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$;
2) найти длину и направление вектора $\bar{m}$ $=2\bar{b}-\bar{a}$;
3) вычислить проекцию вектора $\bar{c}$ на вектор $\bar{m}$;
4) определить, при каком значении λ вектор ($\bar{m}$ - $\lambda\,\bar{c}$) перпендикулярен вектору $\bar{m}$.

Решение. 1) По условию $\bar{a}$ =(1; 2; 3); $\bar{b}$ =(–2; 3; –2); $\bar{c}$ =(3; –4; –5); $\bar{d}$ = (6; 20; 6). Разложение вектора $\bar{d}$ по векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ имеет вид: $\bar{d}=x\bar{a}+y\bar{b}+z\bar{c}$ (*), (где *x, y, z* – числа), поэтому:

$$(6;\ 20;\ 6) = x(1;\ 2;\ 3) + y(-2;\ 3;\ -2) + z(3;\ -4;\ -5).$$

По правилам действий над векторами, заданными координатами, получаем: $(6;20;6) = (x-2y+3z;\ 2x+3y-4z;\ 3x-2y-5z)$.

Приравнивая соответствующие координаты справа и слева, получим систему уравнений: $\begin{cases} x-2y+3z=6; \\ 2x+3y-4z=20; \\ 3x-2y-5z=6; \end{cases}$

которую решим по формулам Крамера: $x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$; $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$; $z=\dfrac{\Delta z}{\Delta}$.

Здесь: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}=-58$; $\Delta x=\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix}=-464$;

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}=-232; \qquad \Delta z=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix}=-116.$$

Тогда: $x = \dfrac{-464}{-58} = 8;\ \ y = \dfrac{-232}{-58} = 4,\ \ z = \dfrac{-116}{-58} = 2.$

Подставив найденные значения x, y, z в разложение (*), получим: $\overline{d} = 8\overline{a} + 4\overline{b} + 2\overline{c}.$

2) Найдём вектор $\overline{m}$: $\overline{m} = 2\overline{b} - \overline{a} = 2$ (– 2; 3; – 2) – (1; 2; 3) = =(– 4; 6; – 4) – (1; 2; 3) = (– 4 – 1; 6 – 2; – 4 – 3) = (– 5; 4; – 7).

Длину вектора $\overline{m}$ найдём по формуле (2.8):

$$\left|\overline{m}\right| = \sqrt{x_m{}^2 + y_m{}^2 + z_m{}^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-7)^2} = \sqrt{25+16+49} = \sqrt{90} = 3\cdot\sqrt{10}.$$

Направление вектора $\overline{m}$ укажем с помощью направляющих косинусов. По формуле (2.10) получаем:

$$\cos\alpha = \frac{-5}{3\sqrt{10}};\quad \cos\beta = \frac{4}{3\sqrt{10}};\quad \cos\gamma = -\frac{7}{3\sqrt{10}}.$$

3) Проекцию вектора $\overline{c}$ на вектор $\overline{m}$ вычислим по формуле (2.5).

$$np_{\overline{m}}\overline{c} = \frac{\overline{c}\cdot\overline{m}}{\left|\overline{m}\right|},\ \text{где}$$

$$\overline{c}\cdot\overline{m} = x_c\cdot x_m + y_c y_m + z_c z_m = 3\cdot(-5) + (-4)\cdot 4 + (-5)\cdot(-7) = -15 - 16 + 35 = 4;$$

$\left|\overline{m}\right| = 3\cdot\sqrt{10}$ (найдено выше). Тогда получаем: $np_{\overline{m}}\overline{c} = \dfrac{4}{3\cdot\sqrt{10}}.$

4) Если вектор $\left(\overline{m} - \lambda\overline{c}\right)$ перпендикулярен вектору $\overline{m}$, то *по условию перпендикулярности* векторов (в форме 2.15) получаем:

$$\left(\overline{m} - \lambda\overline{c}\right)\cdot\overline{m} = 0.$$

По распределительному закон скалярного произведения имеем:

$$\left(\overline{m} - \lambda\overline{c}\right)\cdot\overline{m} = \overline{m}\cdot\overline{m} - \lambda\overline{c}\cdot\overline{m} = \overline{m}^2 - \lambda\left(\overline{c}\overline{m}\right) = 0.$$

Далее по свойству о скалярном квадрате вектора получаем:

$$\overline{m}^2 = \left|\overline{m}\right|^2 = \left(3\bullet\sqrt{10}\right)^2 = 90.$$

В результате, учитывая, что $\bar{c} \cdot \bar{m} = 4$ (см. п. 3 данной задачи), имеем: 90 – 4 λ=0 $\Rightarrow 4\lambda = 90 \Rightarrow \lambda = \dfrac{90}{4} \Rightarrow \lambda = 22{,}5$.

Ответ. 1) $\bar{d} = 8\bar{a} + 4\bar{b} + 2\bar{c}$; 2) $|\bar{m}| = 3\sqrt{10}; \cos\alpha = -\dfrac{5}{3\sqrt{10}}; \cos\beta = \dfrac{4}{3\sqrt{10}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{7}{3\sqrt{10}}$; 3) $np_m\bar{c} = \dfrac{4}{3\sqrt{10}}$; 4) $\lambda = 22{,}5$.

Задача 2.4. Проверить коллинеарность векторов $\bar{a} = (2;-1;3)$ *и* $\bar{b} = (-6;3;-9)$. Установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну сторону или в противоположные стороны?

Решение.

1. *Условие коллинеарности* двух векторов (формула 2.14):

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Проверим его:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_a}{x_b} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}; \qquad \frac{y_2}{y_1} = \frac{y_a}{y_b} = -\frac{1}{3}; \qquad \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_a}{z_b} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}.$$

Следовательно, векторы коллинеарные.

2. Длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ найдем по формуле $\boxed{?}$

$$|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + ??^2 + ??^2} = \sqrt{14}; \quad |\bar{b}| = \sqrt{??+??+??} = 3\sqrt{14}.$$

Найдем отношение длин заданных векторов:

$\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|} = \dfrac{3\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 3 \Rightarrow$ вектор $\bar{b}$ длиннее вектора $\bar{a}$ в три раза.

3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ направлены в противоположные стороны, так как одноименные координаты имеют противоположные знаки.

Ответ. $\bar{a} \parallel \bar{b}$; вектор $\bar{b}$ длиннее вектора $\bar{a}$ в три раза; направлены векторы в противоположные стороны.

Задача 2.5. Дан треугольник *ABC* с вершинами *A*(–1;5;1), *B*(1;1;–2), *C*(-3;3;2). Требуется:

1) Определить внутренний и внешний углы при вершине *C*.
2) Вычислить длину медианы *AM*.
3) Найти точку *O* пересечения медиан треугольника *ABC*.

Решение. 1) а) Найдем внутренний угол ΔABC при вершине *C*, т.е. $\angle ACB$. Из чертежа (рис. 2.18) видно, что $\angle ACB$ есть угол между векторами $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$.. Найдем координаты этих векторов:

$$\overline{CA} = (x_A - x_C; y_A - y_C; z_A - z_C) = -1-(-3);5-3;1-2) \Rightarrow \overline{CA} = (2;\ 2;-1);$$

$$\overline{CB} = (x_B - x_C; y_B - y_C; z_B - z_C) = -1-(-3);\ 1-3;-2-2) \Rightarrow \overline{CB} = (4;-2;-4).$$

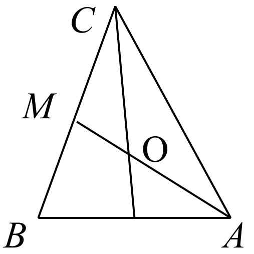


Рис. 2.18

Угол между векторами $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$ найдём по формуле (2.12):

$$\cos(\angle ACB) = \cos(\overline{CA}{}^\wedge\overline{CB}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 4 + 2\cdot(-2) + (-1)\cdot(-4)}{\sqrt{??}\cdot\sqrt{??}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9},\ \text{тогда}\ \angle ACB = \text{arc cos}\ \frac{4}{9}.$$

б) Внешний угол при вершине *C* ($\angle ACD$) можно найти двумя способами.

I *способ* – по определению: внешний угол-это угол, дополняющий до развернутого угла соответствующий внутренний угол, то есть

$$\angle ACD = \pi - \arccos\frac{4}{9}.$$

II *способ*. Внешний угол при вершине *C* образуют векторы $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$,

тогда $\cos\angle ACD = \dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{CB}}{\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{CB}\right|}$; здесь $\overline{AC} = -\overline{CA} = (-2;-2;-1)$; $\overline{CB} = (4;-2;-4)$

$\left|\overline{AC}\right| = \left|-\overline{CA}\right| = 3$; $\left|\overline{CB}\right| = 6$; $\overline{AC}\cdot\overline{CB} = -8.$

Поэтому $\cos\angle ACD = \dfrac{-8}{18} = -\dfrac{4}{9} \Rightarrow \angle ACD = \arccos\left(-\dfrac{4}{9}\right) = \pi - \arccos\dfrac{4}{9}.$

1) Найдем длину медианы *AM*. Сначала определим координаты точки *M* по формулам (2.17): $x_M = \dfrac{x_C + x_B}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1;$

$y_M = \dfrac{y_C + y_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = 2;\ z_M = \dfrac{z_C + z_B}{2} = \dfrac{2+(-2)}{2} = 0.$ Итак, M(–1; 2;0).

По формуле (2.9) получим:

$$|AM| = \left|\overline{AM}\right| = \sqrt{\left(x_M - x_A\right)^2 + (y_M + y_A)^2 + (z_M - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(-1-(-1))^2 + (2-5)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{0+9+1} = \sqrt{10} \Rightarrow |AM| = \sqrt{10}.$$

3) Точка *O* пересечения медиан треугольника делит любую медиану, например *AM*, в отношении $\lambda = 2/1 = 2$ (считая от вершины).Тогда по формуле (2.18): $x_o = \dfrac{x_A + \lambda x_M}{1+\lambda} = \dfrac{-1+2\cdot(-1)}{1+2} = -1;$

$y_o = \dfrac{y_A + \lambda y_M}{1+\lambda} = \dfrac{5+2\cdot 2}{1+2} = 3;\quad z_o = \dfrac{z_A + \lambda z_M}{1+\lambda} = \dfrac{-1+2\cdot 0}{1+2} = \dfrac{1}{3};$ т.е. $O(-1;3;\dfrac{1}{3})$.

Ответ. 1) $\arccos\dfrac{4}{9};\pi - \arccos\dfrac{4}{9}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\left(-1;3;\dfrac{1}{3}\right)$.

Задача 2.6. Фирма изготавливает четыре вида продукции P_1, P_2, P_3, P_4 в количествах 50, 80, 20, 120 единиц. При этом нормы расхода сырья составляют соответственно 7; 3,5; 10; 4 кг. Найти суммарный расход сырья и его изменения при изменениях выпуска продукции P_1, P_2, P_3, P_4 соответственно на +5, – 4, – 2, +10 единиц.

Решение.

1. Пусть вектор выпуска продукции $\bar{x}$ = (50; 80; 20; 120), а вектор расхода сырья $\bar{y}$ = (7; 3,5; 10; 4). Тогда суммарный расход сырья *s* есть скалярное произведение векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, т.е.:

$$s = \overline{x} \cdot \overline{y} = 50 \cdot 7 + 80 \cdot 3{,}5 + 20 \cdot 10 + 120 \cdot 4 = 1310\,(кг).$$

2. Вектор выпуска продукции с учетом изменения:

$$\overline{x}_н = (50+5;\ 80-4;\ 20-2;\ 120+10) = (55;\ 76;\ 18;\ 130).$$

Тогда суммарный измененный расход сырья:

$$s_н = \overline{x_н} \cdot \overline{y} = 55 \cdot 7 + 76 \cdot 3{,}5 + 18 \cdot 10 + 130 \cdot 4 = 1351\,(кг).$$

3. Изменение суммарного расхода сырья:

$$\Delta s = s_н - s = 1351 - 1310 = 41\,(кг)$$

Ответ. s = 1310 (кг); $\Delta s = 41\,(кг)$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

34. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить векторы $\bar{c} = 2\bar{a} + \bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a} - \dfrac{\bar{b}}{2}$, если $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 2$, $(\bar{a}, \wedge \bar{b}) = 45^o$. Найти длину вектора $\bar{c}$.

35. Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ составляют с осью ℓ углы $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi$ соответственно. Найти проекцию на ось ℓ вектора $2\bar{a} + 3\bar{b} - \bar{c}$, если $|\bar{a}| = 4$; $|\bar{b}| = 1, |\bar{c}| = 2.$

36. Построить точку *M(*5; – 3; 4) и определить длину и направление ее радиус – вектора. Проверить равенство $cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

37. Даны точки A(2;6), B(3;6). Определить:

а) координаты середины вектора $\overline{AB}$ – точки M;

б) координаты точки N, делящей вектор $\overline{AM}$ в отношении $\lambda = \left|\overline{AN}\right| / \left|\overline{NB}\right| = 3/2$.

38. Даны векторы $\overline{OA} = \overline{a} = 2\overline{i},\ \overline{OB} = \overline{b} = 3\overline{j} + 3\overline{j},\ \overline{OC} = \overline{c} = 2\overline{j} + 6\overline{j}$.

Требуется: 1) Найти длины векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

2) Разложить вектор $\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ геометрически и аналитически.

39. Даны три вектора: $\overline{a} = (2;-2)$, $\overline{b} = (2;-1), \overline{c} = (2;4)$. Найти координаты вектора $\overline{p} = 2\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$ и разложить его по $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

40. Найти при каких значениях λ и μ вектор $\overline{a} = 5\overline{i} - 3\overline{j} + \lambda\overline{k}$ параллелен вектору $\overline{b} = \mu \cdot \overline{j} + 3 \cdot \overline{j} - 4 \cdot \overline{k}$.

41. Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = 2\overline{p} - \overline{q}$, $\overline{b} = 3\overline{p} - 2\overline{q}$, где $\overline{p}, \overline{q}$ - единичные векторы, а угол между ними $\alpha = (\overline{p} \wedge \overline{q}) = 60^0$.

42. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, причем $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{2}$; $\left|\overline{b}\right| = 0{,}5$; $\left(\overline{a} \wedge \overline{b}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Найти, при каком значении λ вектор $(\overline{a} - \lambda\overline{b})$ будет перпендикулярен: а) вектору $\overline{a}$, б) вектору $\overline{b}$.

43. Найти проекцию вектора $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ на вектор $\overline{b} = \overline{i} - \overline{j} + 4\overline{k}$ и проекцию вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$.

44. Даны векторы $\overline{a}$=(3;–1;–1) и $\overline{b}$= (1; 3; 5). Найти проекцию вектора $\overline{d} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$ на вектор $\overline{l} = \overline{a} + \overline{b}$.

45. Найти угол между векторами $\overline{a} = 2\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{b} = 4\overline{i} - \overline{j} - \overline{k}$.

46. При каком значении k вектор $\overline{a} = (5;k;6)$ перпендикулярен вектору $\overline{b} = (k;-3;1)$?

47. Дан треугольник с вершинами $A(-2;3;1), B(-2;-1;4)$ и C (–2; –4; 0). Требуется:

а) определить его внутренний и внешний углы при вершине C;

б) найти длину медианы AM;

в) вычислить координаты точки O пересечения медиан;

г) сделать чертеж.

48. Найти вектор $\overline{x}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$=(2;1;–1) и удовлетворяющий условию $\overline{x}\cdot\overline{a}=3$.

49. Даны четыре вектора: $\overline{a}$=(2;1;0), $\overline{b}$=(1;–1;2), $\overline{c}=(2;2;-1)$, $\overline{d}=(3;7;-7)$. Разложить вектор $\overline{a}$ по векторам $\overline{b},\overline{c},\overline{d}$.

50. Предприятие выпускает три вида продукции P_1, P_2, P_3 в количестве 30, 40, 50 условных единиц соответственно. Найти выручку предприятия от реализации продукции и ее изменение при изменении цен продукции P_1, P_2, P_3 соответственно на +5, -3, +2 условных единиц.

51. По данным векторам $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ (рис. 2.19) построить каждый из следующих векторов:

1) $\overline{a}+2\overline{b}$; 2) $\overline{b}-\dfrac{\overline{c}}{2}$;

3) $\dfrac{(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})}{3}$; 4) $4\overline{a}-\dfrac{\overline{b}}{3}+\overline{c}$.

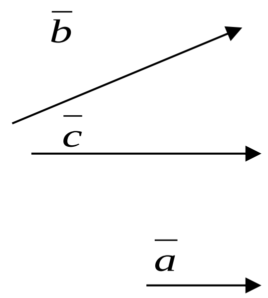


Рис. 2.19

52. Найти длину вектора $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-6\overline{k}$ и его направляющие косинусы.

53. Найти проекцию вектора $\overline{a}$ на ось $\overline{\ell}$, если длина вектора $\overline{a}$ равна $\sqrt{3}$, а угол между осью и вектором составляет 30^0.

54. Найти длину вектора $\overline{a}$, если угол между ним и осью равен $\dfrac{\pi}{4}$, а проекция его на эту ось равна 9.

55. Определить начало *M* вектора $\bar{b} = \overline{MN}$=(5;8;7), если его конец совпадает с точкой *N*(–1; 3; 3).

56. На плоскости *XOУ* даны точки *A*(4;2), $B(2;3), C(0;5)$ и построены векторы $\overline{OA} = \bar{a};\ \overline{OB} = \bar{b};\ \overline{OC} = \bar{c}$. Разложить аналитически и геометрически вектор $\bar{a}$ по векторам $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

57. Даны точки *A*(2; ;0) и *B*(0;–2;5). Построить вектор $\overline{AB}$ и найти:

а) его длину и направление;

б) координаты точки *C*, делящей вектор $\overline{AC}$ в отношении 3/2.

58. Даны три вектора $\bar{a}$=(3;-1), $\bar{b}$=(1;-2), $\bar{c}$=(-1;7). Найти:

а) координаты и длину вектора $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$;

б) разложить вектор $\bar{p}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ аналитически и геометрически.

59. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Зная, что $\left|\bar{a}\right|$=11, $\left|\bar{b}\right| = 4$, вычислить скалярное произведение векторов $\left(2\bar{a} + 3\bar{b}\right)$ и $(2\bar{a} - \bar{b})$.

60. Определить, при каком значении α векторы $\bar{c} = 3\bar{a} + \alpha\bar{b}$ и $\bar{d} = \bar{a} - 2\bar{b}$ будут взаимно перпендикулярны, если $\left|\bar{a}\right|$=7•$\sqrt{2}$; $\left|\bar{b}\right|$=4, ($\bar{a}$^$\bar{b}$)=π/4.

61.Даны векторы $\bar{a} = 3\bar{i} - 6\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}$ и $\bar{c} = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$.

Требуется:

1. найти координаты и длины векторов $(\bar{a} + \bar{c})$ и $(\bar{b} + \bar{c})$;
2. вычислить скалярное произведение векторов $(\bar{a} + \bar{c})$ и $(\bar{b} + \bar{c})$;
3. найти проекцию вектора $(\bar{a} + \bar{c})$ на вектор $(\bar{b} + \bar{c})$;
4. найти проекцию вектора $(\bar{b} + \bar{c})$ на вектор $(\bar{a} + \bar{c})$.

62. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$, если известны точки *A*(2;-3;4), *B*(5;-5;-2), *C* (1;2;3), *D*(7;4;6).

63. Найти угол между векторами $\bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j} + 5 \bullet \sqrt{2} \bullet \bar{k}$ и $\bar{b} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + \sqrt{2} \bullet \bar{k}$

.

64. При каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$: а) коллинеарны, б) ортогональны.

65. Дан треугольник ABC с вершинами A(2;-1;3), B(1;1;1), C(0;0;5).

Требуется: а) определить внутренние углы при вершинах B и A,

б) вычислить внешний угол при вершине C,

в) найти длину медианы AM,

г) вычислить координаты точки O пересечения медиан,

д) сделать чертеж.

66. Даны три вектора: $\bar{p} =$(3;2;4), $\bar{q} =$(4;3;-5), $\bar{r} =$= (7;5;-2).

Найти разложение вектора $\bar{a}$=(4;3;2) по векторам $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$.

---

67. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 2.20) построить каждый из следующих векторов:

1) $3\bar{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\bar{b}$;

3) $2\bar{a} + \frac{1}{3}\bar{b}$; 4) $\frac{1}{2}\bar{b} - 3\bar{b}$.

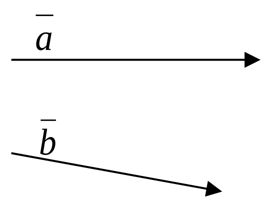


Рис. 2.20

68. Даны длины векторов $|\bar{a}|$=11, $|\bar{b}|$=23, $|\bar{a} - \bar{b}|$=30. Определить величину $|\bar{a} + \bar{b}|$.

69. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = 120^0$, причем $|\bar{a}|$=8, $|\bar{b}|$=5. Определить $|\bar{a} + \bar{b}|$, $|\bar{b} - \bar{a}|$.

70. Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a}$=(16;-12;15).

71. Может ли вектор составлять с координатными осями углы:

а) $\alpha=45^0$; $\beta=60^0$; $\gamma=120^0$; б) $\alpha=45^0$; $\beta=135^0$; $\gamma=60^0$;

в) $\alpha=90^0$; $\beta=150^0$; $\gamma=60^0$?

72. Вектор составляет с осями OY и OZ углы 60^0 и 120^0. Какой угол он составляет с осью OX?

73. Вектор $\overline{OM}$ составляет с осями координат равные острые углы. Найти эти углы и построить вектор $\overline{OM}$, если $|\overline{OM}|=2\sqrt{3}$.

74. Даны точки $M_1(4;-2;6)$, $M_2(1;4;0)$. Найти длину и направление вектора $\overline{M_1M_2}$.

75. Даны два вектора $\bar{a}=(5;8;-3)$ и $\bar{b}=(-1;2;0)$. Определить проекции на координатные оси следующих векторов:

а) $\bar{a}-\bar{b}$, б) $3\bar{a}$, в) $\bar{a}+2\bar{b}$.

76. Проверить, являются ли точки A(-1;2;-3), B(2;-1;1), C(1;-3;-1), D(-5;3;3) вершинами трапеции.

77. Дан вектор $\bar{c}=4\bar{i}+7\bar{j}-4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{d}$, параллельной вектору $\bar{c}$ и противоположного с ним направления, если $|\bar{d}|=27$.

78. Вектор $\bar{\chi}$, коллинеарный вектору $\bar{a}=(6;\ -8;\ -7{,}5)$ образует острый угол с осью OZ. Зная, что $|\bar{\chi}|=50$, найти его координаты.

79. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}|=11$, $|\bar{b}|=2$, вычислить $(2\bar{a}-5\bar{b})^2$.

80. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=1$, вычислить угол между векторами $\bar{\rho}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\bar{q}=\bar{a}-\bar{b}$

81. Даны векторы $\bar{a}=(8;9;-15)$, $\bar{b}=(0;-3;-1)$. Вычислить:

а) $\bar{a}\bullet\bar{b}$, б) $(\bar{a}+\bar{b})^2$, в) $(\bar{a}-\bar{b})^2$.

82. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=2$, вычислить $\left|\left[\left(3\bar{a}+2\bar{b}\right)\bullet\left(\bar{a}-\bar{b}\right)\right]\right|$.

83. Даны точки $A\ (5;\ 6;\ -2)$, $B\ (2;\ 2\ ;\ 0)$, $C(3;-1;2)$, $D(1;7;1)$. Вычислить $np_{\overline{CD}}\overline{AB}$.

84. Вектор $\overline{OA}$ составляет с осями *OX, OУ* и *OZ* углы, соответственно равные $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$. Доказать, что векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ перпендикулярны, где точка $B(2;\ 2;\ -2\sqrt{2})$.

85. Найти проекцию вектора $\overline{a}+2\overline{b}-\overline{c}$ на вектор $2\overline{c}+\frac{\overline{b}}{2}$, где $\overline{a}=3\overline{i}+4\overline{k}$, $\overline{b}=5\overline{j}-3\overline{k}$ и $\overline{c}=2\overline{i}+3\overline{j}-4\overline{k}$.

86. Даны векторы $\overline{a}=6\overline{i}-8\overline{j}+5\sqrt{2}\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{i}-4\overline{j}+\sqrt{2}\overline{k}$. Найти угол, образованный вектором $\overline{a}-\overline{b}$ с осью *OZ*.

87. Найти вектор $\overline{d}$, перпендикулярный векторам $\overline{a}=\overline{i}+\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{j}-\overline{k}$, если известно, что его проекция на вектор $\overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k}$ равна 1.

88. Определить, при каком значении m векторы $\overline{a}=m\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-m\overline{k}$ взаимно перпендикулярны.

89. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{p}-3\overline{q}$ и $\overline{b}=3\overline{p}+4\overline{q}$, если $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=3$, $(\overline{p}\wedge,\overline{q})=\frac{\pi}{3}$.

90. Вычислить тупой угол, образований медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного треугольника.

91. Вычислить:

1. $(\overline{m}+\overline{n})^2$, если $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – единичные векторы, $(\overline{m}\wedge;\overline{n})=30^0$;
2. $(\overline{a}-\overline{b})^2$,если $|\overline{a}|=2\sqrt{2}$; $|\overline{b}|=4$; $(\overline{a}\wedge;\overline{b})=135^0$.

92. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}=2\overline{i}+\overline{j}$ и $\overline{b}=-2\overline{j}+\overline{k}$.

93. Даны три последовательные вершины параллелограмма A (-3;-2;0), B(3;-3;1), C(5;0;2). Найти его четвертую вершину D и угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

94. Дан треугольник ABC с вершинами A (1;2;3); B(-2;4;1), C(7;6;3). Требуется:

1. определить все его внутренние и внешние углы,

2. найти длину медианы CM;

3. вычислить координаты точки D пересечения медиан;

4. сделать чертеж.

95. Предприятие выпускает четыре вида продукции P_1, P_2, P_3, P_4 в количествах 20; 30; 40; 50 единиц. При этом нормы расхода сырья составляют соответственно 5; 2,5; 3; 1,5 кг. Найти суммарный расход сырья и его изменение при изменениях выпуска продукции P_1, P_2, P_3, P_4, соответственно на +3;+2;-1;+4 единиц.

96. Даны точки A(-3;-2 B(0;-1), C(-2;5). Доказать, что треугольник ABC прямоугольный.

97. Пусть A(3;2), B(9;6), C(9;2) , D(3;4). Требуется разложить аналитически и геометрически:

а) вектор $\overline{AB}$ по векторам $\overline{AD}$ и $\overline{AC}$;

б) вектор $\overline{AD}$ по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$;

в) вектор $\overline{AC}$ по векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$.

98. Зная одну из вершин треугольника A(1;-6;-3) и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB}$=(0;3;5), $\overline{BC}$=(4;2;-1), найти остальные вершины и сторону CA.

99. Вычислить координаты точки M, расстояния от которой до оси абсцисс и до точки A (1;2) одинаковые и равны 10.

100. Построить треугольник с вершинами A(-4;2), B(0;-1), C(3;3). Определить:

а) периметр треугольника;

б) длину средней линии, проходящей через стороны AB и BC;

в) центр тяжести (точку пересечения медиан);

г) внутренний и внешний углы при вершине A.

Тест 2

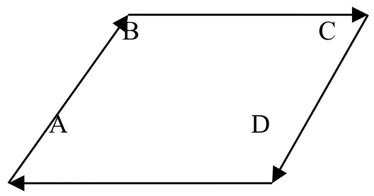
1. Вектором называется:

а) направленный луч; б) луч;

в) направленный отрезок; г) прямая.

2. Указать противоположные векторы:

1) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$; 2) $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$; 3) $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$; 4) $\overline{CB}$ и $\overline{AD}$.



а)1 и 2; б)2 и 3; в) 3 и 4; г) 1 и 4.

3. Установить соответствие между законами сложения векторов и их формульной записью:

1) переместительный	а) $k(\bar{a}+\bar{b}) = k\,\bar{a} + k\,\bar{b}$;
2) распределительный	б) $\bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}$;
3) сочетательный	в) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$.

4. Скалярное произведение $\bar{a}\bullet\bar{b}$ векторов $\bar{a} = (0;-1;5)$ и $\bar{b} = (5;4;-3)$ равно …

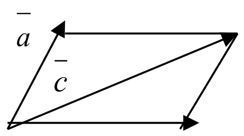
5. Длина вектора $\bar{a} = (\sqrt{8}\,; 4;5)$ равна …

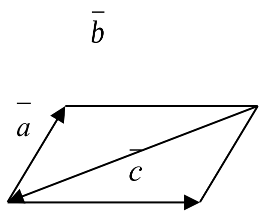
6. Если направления оси и составляющей не совпадают, то:

а) $\text{пр}_{\bar{\ell}}\ \bar{a} = |\text{сост}_{\ell}\ \bar{a}|$; б) $\text{пр}_{\bar{\ell}}\ \bar{a} = |\text{сост}_{\ell}\ \bar{a}|$;

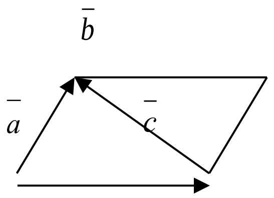
в) $\text{пр}_{\bar{\ell}}\ \bar{a} = \pm|\text{сост}_{\ell}\ \bar{a}|$; г) $\text{пр}_{\bar{\ell}}\ \bar{a} = \pm(\text{сост}_{\ell}\ \bar{a})$.

7. Установить соответствие между рисунками и векторными равенствами:

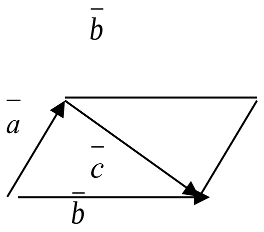
1) 	а) $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$;

2) 

б) $\bar a+\bar b-\bar c=\bar 0$;

3) 

в) $\bar a-\bar b+\bar c=\bar 0$;

4) 

г) $\bar a-\bar b-\bar c=\bar 0$.

8. Найти $\bar a\,\bar b+\bar b\,\bar c\;+\bar a\,\bar c$, где $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ – единичные векторы, удовлетворяющие условию $\bar a+\bar b+\bar c$=0.

9. Векторы $\bar a=\mathrm{m}\bar i-3\bar j+2\bar k$ и $\bar b=\bar i+2\bar j-\mathrm{m}\bar k$ взаимно перпендикулярны при $m=\ldots$.

10. Даны векторы $\bar a=3\bar i-6\bar j-\bar k$, $\bar b=\bar i+4\bar j+5\bar k$, $\bar c=3\bar i+4\bar j+2\bar k$. Найти (с точностью до 0,1) проекцию вектора ($\bar b+\bar c$) на направление вектора ($\bar a$ + $\bar b$).

11. Если $\bar a=(x_1;\,y_1)$, $\bar b=(x_2;\,y_2)$, то условие коллинеарности векторов $\bar a$ и $\bar b$:

а) $\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}$; б) $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_2}{y_1}$; в) $\dfrac{x_1}{y_1}=-\dfrac{x_2}{y_2}$; г) $\dfrac{x_1}{x_2}=-\dfrac{y_1}{y_2}$.

12. Если пр$_{\bar в}$ $\bar a$=3, пр$_{\bar в}$ $\bar c$ = – 4, то пр$_{\bar в}$ ($3\bar a$ - $\bar c$) равна:

а) 5; б)13; в) – 1; г) 7.

13. Вектор $\overline{AB}$, где A(3;– 4;2) и B(–3;2;1) имеет координаты:

а) (0;-6;1); б)(-6;6;-1); в) (0;-2;1); г)(6;-6;1).

14. Внутренний угол A треугольника ABC находят по формуле:

а) $\cos\angle A=\dfrac{\overline{AB}\bullet\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\bullet\left|\overline{AC}\right|}$; б) $\cos\angle A=\dfrac{\overline{AB}\bullet\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\bullet\left|\overline{CA}\right|}$;

в) $\cos\angle A=\dfrac{\overline{BA}\bullet\overline{CA}}{\left|\overline{BA}\right|\bullet\left|\overline{CA}\right|}$; г) $\cos\angle A=\dfrac{\overline{BA}\bullet\overline{AC}}{\left|\overline{BA}\right|\bullet\left|\overline{AC}\right|}$.

15. Разложение вектора $\overline{d}=\overline{a}-\overline{b}+\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (если $\overline{a}$ = (3; – 1), $\overline{b}$ = (1;–2), $\overline{c}$ = (– 1;7)) имеет вид: $\overline{d}=x\,\overline{a}+y\,\overline{b}$, где $x=\ldots$; $y=$ ..

Вопросы для самопроверки по теме «Элементы векторной алгебры»

1. Понятие вектора, виды векторов (коллинеарные, компланарные, равные, противоположные векторы, нулевой вектор, орт вектора).

2. Правило треугольника сложения двух векторов.

3. Правило параллелограмма сложения двух векторов.

4. Сложение нескольких векторов.

5. Вычитание векторов.

6. Умножение вектора на число.

7. Свойства линейных операций над векторами.

8. Понятие составляющей вектора по оси и проекции вектора на ось.

9. Свойства проекции вектора на ось.

10. Разложение вектора на составляющие по координатным осям. Координаты радиус-вектора. Координаты вектора, заданного начальной и конечной точками.

11.Сложение и вычитание векторов, заданных своими координатами. Умножение вектора в координатной форме на число.

12. Скалярное произведение векторов: определение, свойства.

13. Скалярное произведение векторов в координатной форме, длина вектора, расстояние между точками.

14. Направляющие косинусы вектора, связь между ними.

15. Угол между векторами.

16.Условия перпендикулярности и параллельности векторов.

17. Координаты точки, делящей вектор в отношении λ.

18. Координаты середины вектора.

3. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

3.1. Необходимый теоретический минимум

Определение 3.1. **Уравнением прямой** называется такое уравнение первой степени с переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки этой прямой.

Определение 3.2. Вектор $\bar{n}$ перпендикулярный прямой a, называется её **нормальным вектором.**

Определение 3.3. Вектор $\bar{s}$**,** коллинеарный прямой ***a*,** называется её **направляющим вектором.**

- Виды уравнения прямой, а также формулы для нахождения углового коэффициента k приведены в таблице 3.1.

Частные случаи уравнения прямой с угловым коэффициентом $y=kx+b$*:*

1. При b=0 => $y = kx$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей: а) острый угол с осью OX при k = tgα > 0;
   б) тупой угол с осью OX при $k = tg\alpha < 0$ (рис. 3.1).
2. При α =0 => k = tg0 = 0 => уравнение имеет вид $y = b$, проходит через точку $B(0;b)$ параллельно оси OX (рис.3.2).
3. При $\alpha = 0$ и $b = 0$ => $y = 0$ – уравнение оси ОX.
4. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$ => $k = \text{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$ => прямая не имеет углового коэффициента.

   Уравнение имеет вид $x = a$, т.е. прямая проходит через точку $A(a;0)$ параллельно оси $OУ$ (рис.3.3).
5. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $a = 0$ => $x = 0$ – уравнение оси $OУ$.

Частные случаи общего уравнения прямой Ax+By+C=0:

1. При C=0 => $y = -\frac{A}{B} \cdot x$ – прямая проходит через начало координат (рис.3.1).

2. При A=0 => $y = -\frac{C}{B} \cdot b$ – прямая параллельна оси оси OX (рис.3.2).

3. При A=C=0 => $By = 0$ => $y = 0$ – ось OX.

4. При B=0 => $x = -\frac{C}{A} = a$ – прямая параллельна оси $OУ$ (рис.3.3).

5. При B=C=0 => Ax=0 => $x = 0$ – ось $OУ$.

Таблица 3.1 - Виды уравнения прямой

№ п/п	**Название уравнения**	**Вид уравнения**	**Угловой коэффициент**	**Необходимые данные**
1	Общее	$Ax + By + C = 0$	$k = -\frac{A}{B}$	$\overline{n} = (A;\ B)$; $M_0(x_0;\ y_0) \in$прямой
2	с угловым коэффициентом	$y = kx + b$	коэффициент при x	b – величина отрезка на $OУ$; $k = tg\alpha$, α - угол наклона прямой к оси OX
3	в отрезках	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	$k = -\frac{b}{a}$	a – отрезок на OX; b – отрезок, отсекаемый на $OУ$
4	проходящей в данном направлении через данную точку	$y - y_0 = k\,(x - x_0)$	коэффициент при $(x - x_0)$	$M_0(x_0;y_0) \in$прямой
5	проходящей через две данные точки	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ лежат на прямой

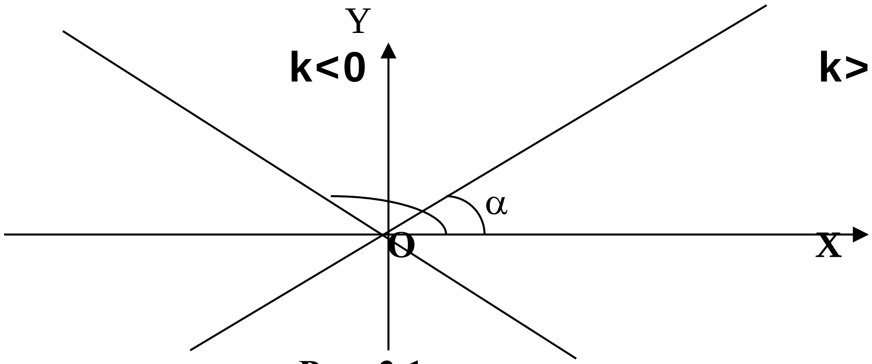


Рис. 3.1

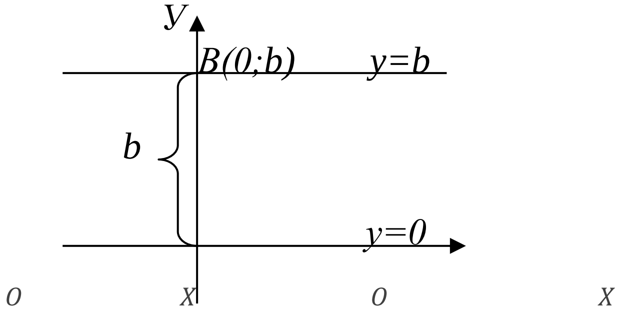


Рис.3.2

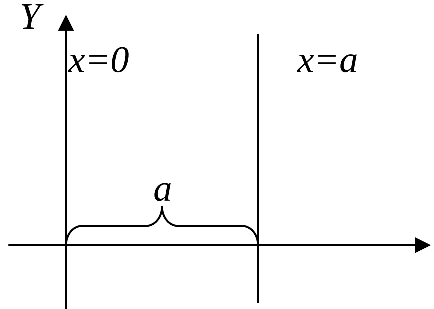


Рис. 3.3

Частные случаи общего уравнения прямой Ax+By+C=0:

1. При C=0 => $y = -\dfrac{A}{B} \cdot x$ – прямая проходит через начало координат (рис.3.1).

2. При A=0 => $y = -\dfrac{C}{B} \cdot b$ – прямая параллельна оси оси OX (рис.3.2).

3. При A=C=0 => $By = 0$ => $y = 0$ – ось OX.

4. При B=0 => $x = -\dfrac{C}{A} = a$ – прямая параллельна оси $OУ$ (рис.3.3).

5. При B=C=0 => Ax=0 => $x = 0$ – ось $OУ$.

Таблица 3.2 - Взаимное расположение прямых

	Прямые заданы уравнениями	
	в общем виде: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	с угловым коэффициентом: $y=k_1x + b_1$ $y=k_2x + b_2$
Угол φ между двумя прямыми	$\cos\varphi = \dfrac{\pm(A_1A_2 + B_1B_2)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$	$tg\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$
Прямые параллельны *(условие параллельности)*	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$	$k_1=k_2$
Прямые перпендикулярны (*условие перпендикулярности)*	$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$	$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$

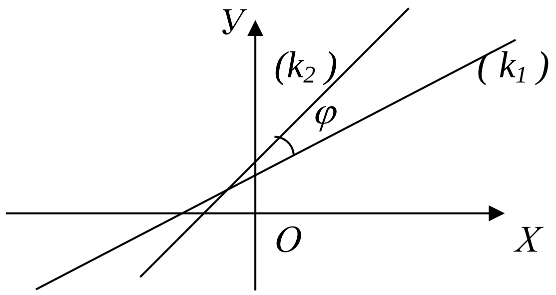


Рис.3.4

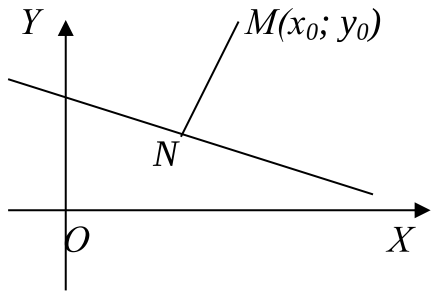


Рис. 3.5

! При вычислении $tg\varphi$ следует учесть, что *углом между двумя прямыми* называется угол, на который надо повернуть прямую (с угловым коэффициентом k_1) до совпадения со второй прямой (с угловым коэффициентом k_2) против часовой стрелки (рис.3.4).

Определение. **Расстоянием от точки $M(x_0;y_0)$ до прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$** называется длина перпендикуляра $d= /MN/$, опущенного из точки M на данную прямую (рис.3.5) и вычисляемая по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Чтобы найти точку пересечения двух непараллельных прямых, нужно решить совместно их уравнения:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1; \\ A_2x+B_2y=-C_2. \end{cases}$$

Решение данной системы можно найти по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta},$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta},$$

где $\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $\Delta x=\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $\Delta y=\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}$.

Причем если: а) $\Delta \neq 0$, то прямые имеют точку пересечения;

б) $\Delta = 0$, а $\Delta x \neq 0$ или $\Delta y \neq 0$, то прямые параллельны ;

в) $\Delta=\Delta x=\Delta y=0$, то прямые совпадают.

3.2. Примеры решения типовых задач

Задача 3.1. Построить прямые, найти их угловые коэффициенты и координаты нормальных векторов:

1. y=3x+2; **2.** 3x+5y-15=0; **3.** 5x-y=0; **4.** 7+x=0; **5.** 3y–6=0.

Решение.

1. а) Положение прямой на плоскости определяется двумя точками, принадлежащими этой прямой, поэтому для построения прямой достаточно знать координаты двух её любых точек. Для этого вычисляем значения *y* по данному равенству *y*=3*x*+2 при любых значениях *x*. Например, пусть *x* = 0, тогда *y* = 3•0+2=2;

при *x* = –1 => *y* = 3•(-1)+2= –1.

Составляется следующая таблица:

x	0	–1
y	2	– 1

Таким образом, через полученные две точки (0;2) и (-1;-1) строим прямую (рис. 3.6).

б) Угловой коэффициент прямой *k*=3 (см. табл. 3.1(строка 2)).

в) Нормальный вектор $\overline{n}$ = (*A; B*), где *A, B* – коэффициенты при *x* и *y* общего уравнения прямой (строка 1 табл. 3.1). Поэтому преобразуем исходное уравнение к общему:

y = 3x+2 => 3x – y +2=0 => *A* =3, *B*= –1 => $\overline{n}$ = (3;–1).

2. а) Так как уравнение прямой 3x + 5y –15 = 0 содержит свободный член (c= –15), то прямая пересекает координатные оси. Найдем эти точки пересечения: с осью *OX* (y=0) => 3x+5•0 –15=0 => 3x –15=0 => 3x=15 => x=5 => A(5;0); с осью *OY* (x=0) => 3•0+5y – 15=0 => y = 3 => B (0;3).

Далее строим точки A и B и проводим искомую прямую (рис.3.6).

б) Угловой коэффициент находим по формуле: $k = -\frac{A}{B}$ (строка1 табл.3.1). В нашем случае A=3; B=5. Тогда $k = -\frac{3}{5}$.

в) Нормальный вектор $\overline{n}$ = (A;B) => $\overline{n}$ = (3;5).

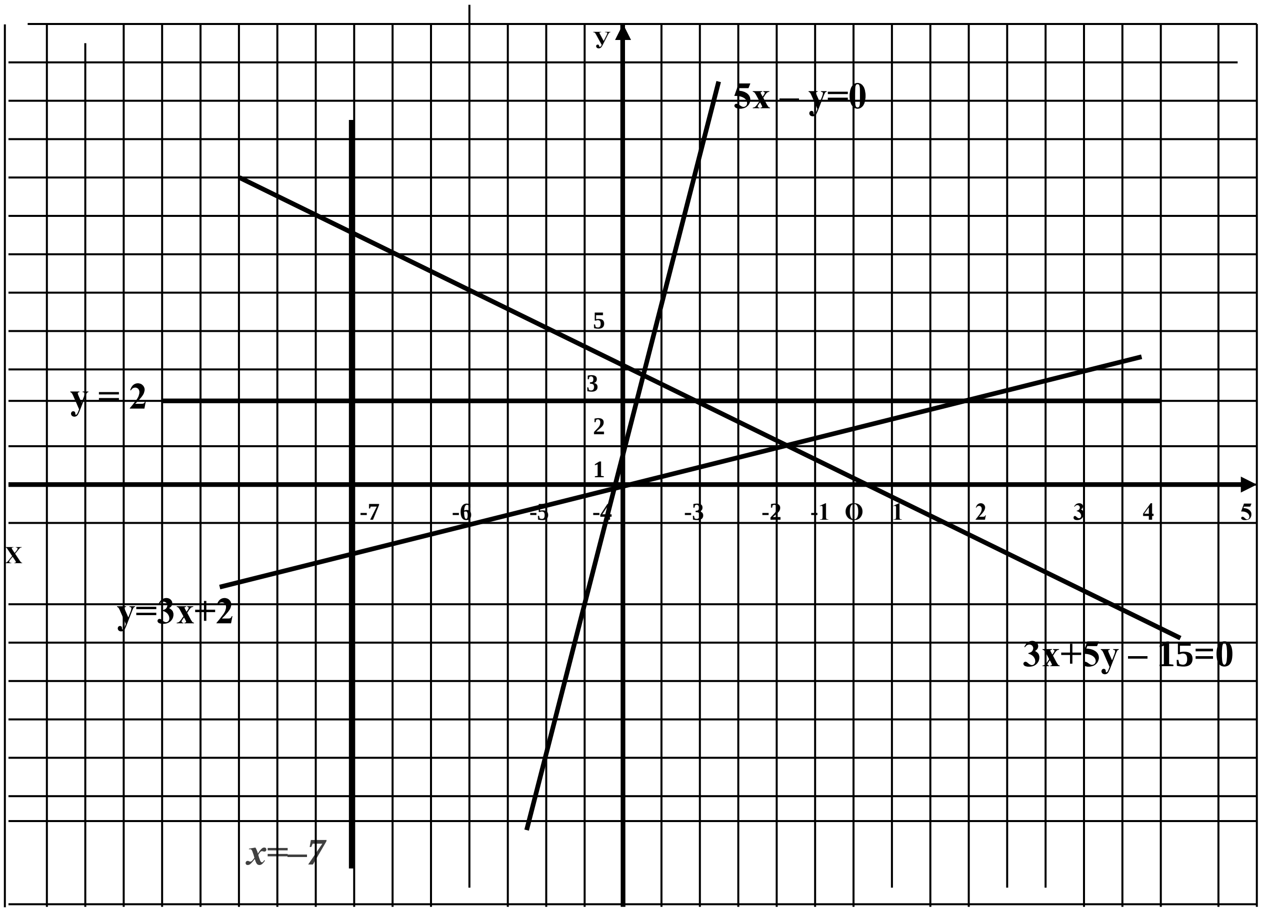


Рис. 3.6

3. а) Так как свободный член уравнения 5х – у = 0 равен нулю, то прямая проходит через начало координат, т.е. через точку 0(0;0). Вычислим ещё одну точку прямой. Пусть х =1, тогда получаем: 5•1 – у = 0 => у = 5 => М (1;5). Через точки О(0;0) и М (1;5) проводим искомую прямую (рис.3.6).

б) Угловой коэффициент прямой $k = -\frac{A}{B} = -\frac{5}{-1} = 5$.

в) Нормальный вектор прямой $\overline{n}$ = (5;-1).

4. а) Запишем уравнение прямой 7+х=0 в виде: х= – 7 => прямая параллельна оси *ОУ* и проходит через точку (-7;0) (см. *Частные случаи уравнения прямой с угловым коэффициентом*, п. 4) (рис. 3.6).

б) Прямая не имеет углового коэффициента, так как α =90^0 , а *b* = tg90 ^{0} = ∞.

в) Нормальный вектор прямой $\overline{n}$ = (1;0).

5. а) Преобразуем уравнение прямой 3y – 6 = 0 так: 3y=6 => y=2 => прямая параллельна оси *OX* и проходит через точку (0;2) (см. *Частные случаи уравнения прямой*) (рис.3.9).

б) Угловой коэффициент прямой $k = -\frac{A}{B} = -\frac{0}{3} = 0$.

в) Нормальный вектор прямой $\bar{n}$ =(0;3).

Ответ.

1. рис. 3.6; k=3; $\bar{n}$ = (3; –1); **2**. рис. 3.6; k= – 3/5; $\bar{n}$ = (3;5);

3. рис. 3.6; k = 5; $\bar{n}$ =(5;-1); **4**. рис. 3.6; $k = \infty$; $\bar{n}$ = (1;0);

5. рис. 3.6; k=0; $\bar{n}$ =(0;3).

Задача 3.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(4;-1):

1. под углом 135^0 к оси *OX*;

2. перпендикулярно вектору $\bar{n}$ = (3;5);

3. параллельно вектору $\bar{s}$ = (1;4);

4. параллельно оси *OY*; **5.** и точку N(– 8;2).

Решение.

1. Угловой коэффициент k = tg135^0 = –1. Т.к. известно, что прямая проходит через точку M(4;-1), то воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (строка 4 табл.3.1): $y - y_м = k(x - x_м)$ => y – (-1) = –1•(x – 4) => y+1= –x + 4 => x+y –3 = 0 – уравнение искомой прямой.

2. Если прямая перпендикулярна вектору, то согласно определению, этот вектор является нормальным и имеет координаты $n = (A;B)$. Поэтому в нашем случае получаем A=3; B=5. Подставим A и B в общее уравнение прямой: Ax +By +C=0 => 3•x+5•y+C=0. Далее, т.к. прямая проходит через точку M(4;-1), то справедливо равенство:3•4 + 5(-1) +C = 0 => 12 –5 + C = 0 => 7 + C = 0 => C= –7.

В итоге получаем искомое уравнение: 3x + 5y – 7 = 0.

3. Если прямая MN, где M(4;-1); N (x;y) параллельна вектору $\bar{s}$, то $\overline{MN} \parallel \overline{S}$, где $\overline{MN}$ = (x – 4; y + 1). По условию параллельности векторов (формула $\boxed{?}$) получаем: $\frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{4}$ => 4•(x-4) = y+1 => 4x–y–17=0.

4. Уравнение прямой, проходящей через точку M(4;-1) и параллельной оси *OУ* в общем виде $x = a$, в нашем случае $a = 4$, поэтому искомое уравнение: $x = 4$.

5. Уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид (строка 5 табл.3.1): $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Тогда для прямой, проходящей через точки M и N получаем:

$$\frac{y-y_M}{y_N-y_M} = \frac{x-x_M}{x_N-x_M} \quad => \quad \frac{y-(-1)}{2-(-1)} = \frac{x-4}{-8-4} \quad => \quad \frac{y+1}{3} = \frac{x-4}{-12} \quad =>$$

$\frac{y+1}{1} = \frac{x-4}{-4}$ => – 4•(y +1) = x – 4 => $\boxed{??}$ x + 4y = 0 – искомое уравнение.

Ответ.

1. x+y-3=0; **2.** 3x+5y –7=0

3. 4x+y –17=0; **4.** x=4; **5.** x+4y=0.

Задача 3.3. Издержки производства 100 штук некоторого товара составляют 300 рублей, а 500 штук – 600 рублей. Определить издержки производства 400 единиц товара при условии, что функция издержек линейна.

Решение. С математической точки зрения, условие задачи означает, что функция издержек представляет собой прямую линию, проходящую через точки A(100;300) и B(500;600). Составим уравнение прямой M_1,M_2:

$$\frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{x-x_A}{x_B-x_A} \quad => \quad \frac{y-300}{600-300} = \frac{x-100}{500-100} \quad =>$$

=> $\boxed{??}$ y = 0,75•x+225 – математическая модель производства.

Тогда, если x = 400, то y = 0,75•400 + 225=525 (руб.).

Ответ. 525 руб.

Задача 3.4. Дана прямая 4x – 5y + 20=0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку К (5,2):

1. параллельно данной прямой;

2. перпендикулярно к данной прямой.

Решение.

Найдем угловой коэффициент прямой 4x – 5y+20=0 (a). В нашем случае A=4, B= -5. Поэтому $k_a = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{5}$. Для составления уравнения прямой b воспользуемся уравнением прямой, проходящей в данном направлении через данную точку (строка 4 табл. 3.1): $y - y_к = k_b(x - x_к)$ => $y - 2 = k_b (x - 5)$ (*) .

Далее найдем угловой коэффициент прямой b , т.е. k_b.

1. Т.к. a || b, то по *условию параллельности* прямых (табл. 3.2): $k_b = k_a = -4/5$.

Подставим найденный угловой коэффициент k_b в уравнение (*): $y - 2 = -\frac{4}{5} \bullet (x - 5)$ => $5(y - 2) = -4(x - 5)$ => $\boxed{??}$ 4x +5y –30=0 – искомая прямая.

2. Т.к. $a \perp b$, то по условию *перпендикулярности прямых* (табл.3.2) имеем: $k_b = -1/k_a = -1 / (-4/5) = 5/4$.

Подставим k_b в выражение (*):

$y - 2 = \frac{5}{4} \bullet (x - 5)$ => $\boxed{??}$ 5x – 4y –17 = 0 – искомая прямая.

Ответ. **1**. 4x + 5y –30 = 0;

2. 5x – 4y –17 = 0.

Задача 3.5. Для треугольника ABC с вершинами A(3;4), B(2;-1), C(-2;5) требуется:

I. написать уравнения прямых, на которых лежат:

1. сторона AB; **2.** медиана AE; **3.** высота AD.

II. Найти длину: **1.** сторон AC и BC; **2.** высоты CF.

III. Определить точку К пересечения биссектрисы CK со стороной AB.

IV. Определить тангенс угла и сам угол при вершине A.

Решение.

I.1. Для составления уравнения стороны АВ воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (строка 5 табл.3.1):

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}.$$

В нашем случае получаем: $\frac{y-4}{-1-4} = \frac{x-3}{2-3}$ => $\frac{y-4}{-5} = \frac{x-3}{-1}$ => $\frac{y-4}{5} = x-3$ =>

?? 5x – y –11 = 0 – уравнение стороны АВ.

2. Т.к. АЕ – медиана, то Е – середина стороны СВ (рис. 3.7). Тогда координаты точки Е (формула ?) находятся так:

$$x_E = \frac{x_B - x_C}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0;$$ y_E= ?? = 2 => Е (0;2).

Далее запишем уравнение прямой АЕ, используя уравнение ?:

?? = $\frac{x - x_A}{x_E - x_A}$ => ?? = $\frac{x-3}{0-3}$. После преобразований получаем:

2х – 3у + 6 =0 – уравнение медианы АЕ.

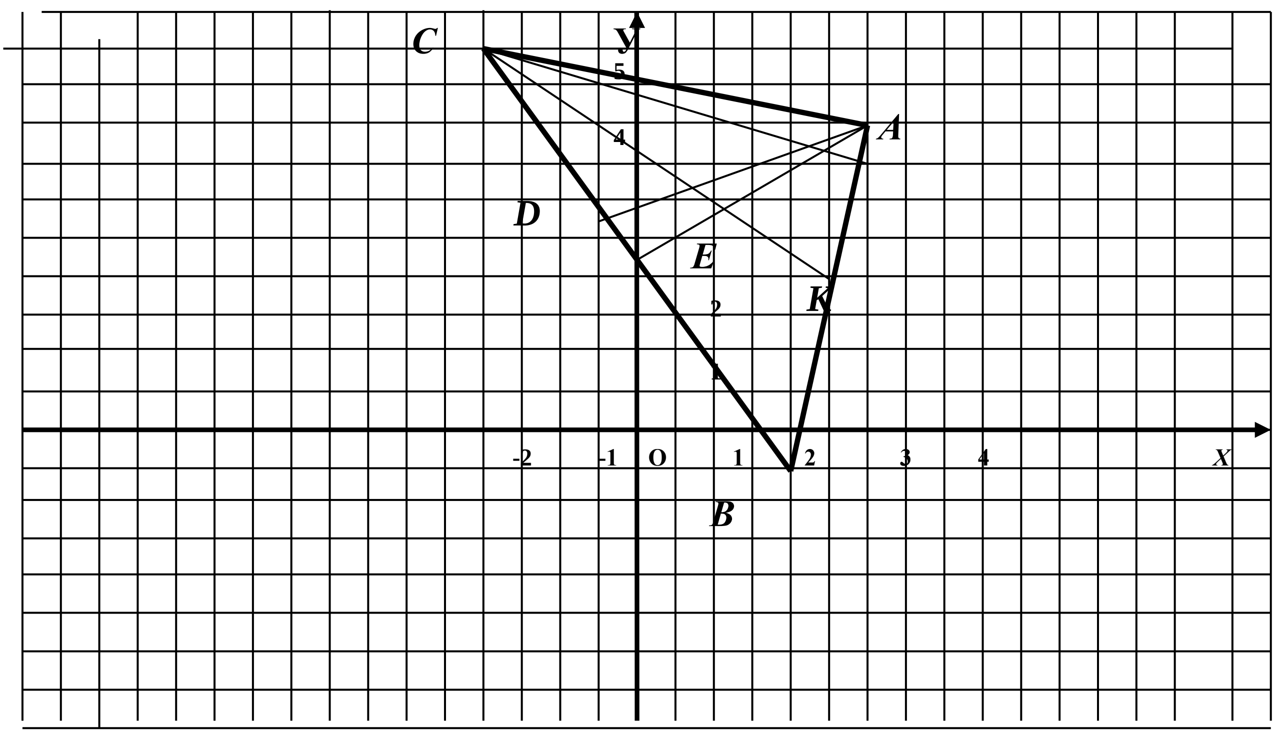


Рис. 3.7

3. Т.к. AD высота, то AD$\perp$ BC, тогда по *условию перпендикулярности* прямых (табл.3.2*):* $k_{AD} = -\dfrac{1}{k_{BC}}$.

Найдем угловой коэффициент k_{BC} прямой BC по формуле для углового коэффициента прямой, проходящей через две точки (строка 5 табл.3.1): $k_{BC} = \dfrac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \dfrac{-1-5}{2-(2)} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{2}{3}$.

Тогда угловой коэффициент высоты AD равен: k_{AD} = – 1 (- 2/3) = 3/2.

Теперь можно написать уравнение прямой AD как прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (строка ? табл.3.1): $y - y_A = k_{AD}(x - x_A)$ => $y - 4 = \frac{3}{2}\cdot(x-3)$ => $2(y-4) = 3(x-3)$ =>?? $3x - 2y - 1 = 0$ – уравнение высоты AD.

II. **1.** Длины сторон AC и BC найдём по формуле расстояния между двумя точками (формула ?) : d= $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Тогда: $|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-3)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{26}$;

$|BC| = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = ?? = 2\sqrt{13}$.

2. Высоту CF можно рассматривать как перпендикуляр, по которому определяется отклонение точки C от прямой AB. Поэтому для определения длины высоты CF воспользуемся формулой (3.1.): $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где $x_0 = -2$; $y_0 = 5$ (т.к. находим расстояние от точки C(-2;5)); A=5; B= –1; C= –11 (т.к. уравнение прямой AB: $5x - y - 11 = 0$ (см. пункт I.1.) решения данной задачи). В результате получаем: $|CF| = \dfrac{|5\bullet(-2)+(-1)\bullet 5+(-11)|}{\sqrt{5^2+(-1)^2}} = \dfrac{26}{\sqrt{26}} = \sqrt{26}$.

III. Биссектриса CK делит сторону на отрезки, пропорциональные длинам противолежащих сторон, т.е. $\lambda = \dfrac{BK}{KA} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{\sqrt{2}\bullet\sqrt{13}} = \sqrt{2}$.

Тогда по формулам для определения координаты точки, делящей отрезок в отношении λ (формула $\boxed{?}$), получаем:

$$x_K = \frac{x_B + \lambda x_A}{1+\lambda} = \frac{2+\sqrt{2}\bullet 3}{1+\sqrt{2}} = \frac{(2+3\bullet\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{2-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3\bullet 2}{1^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{-4+\sqrt{2}}{-1} = 4-\sqrt{2};$$

$$y_K = \frac{-1+\sqrt{2}\bullet 4}{1+\sqrt{2}} = \frac{(-1+4\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{-1+\sqrt{2}+4\sqrt{2}-4\bullet 2}{1-2} = \frac{-9+5\sqrt{2}}{-1} = 9-5\sqrt{2}.$$

Итак, координаты точки К($4-\sqrt{2}$; $9-5\sqrt{2}$).

$\boxed{!}$ При вычислении координаты точки К избавились от иррациональности в знаменателе путем умножения и числителя, и знаменателя $x_к$ и $y_к$ на выражение, сопряженное к иррациональному ($1-\sqrt{2}$). Затем применили формулу сокращенного умножения: $(a+b)\bullet(a-b) = a^2 - b^2$.

IV. Тангенс угла при вершине А определим как тангенс угла между прямыми АС ($k_{AC} = k_1$) и АВ ($k_{Aв} = k_2$):

$$\text{tg}\ \angle A = \text{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1+k_1\bullet k_2} = \frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}\bullet k_{AC}}.$$

$\boxed{?}$ Почему в данной задаче АС – первая прямая, а АВ – вторая при вычислении угла между прямыми?

Здесь $k_{AB} = \boxed{??} = 5$; $k_{AC} = \boxed{??} = -1/5$. В результате получаем:

$$\text{tg}\angle A = \frac{5-(-\frac{1}{5})}{1+5(-\frac{1}{5})} = \frac{5\frac{1}{5}}{0} = \infty \Rightarrow \angle A = 90^\circ.$$

Ответ. **I.** **1**. $5x - y - 11 = 0$; **2.** $2x - 3y + 6=0$; **3**. $3x - 2y - 1=0$;

II. **1**. $|AC| = \sqrt{26}$; $|BC| = 2\sqrt{13}$; **2.** $|CF| = \sqrt{26}$;

III. К ($4-\sqrt{2}$; $9-5\sqrt{2}$); **IV**. $\text{tg}\angle A = \infty$; $\angle A = 90^0$.

Задача 3.6 Издержки *y* (в рублях) на изготовление партии деталей определяются по формуле $y = ax + b$, где *x* – объем партии. Для первого варианта технологического процесса $y=1{,}45x + 20$. Для второго варианта известно, что $y=157{,}5$ рублей при $x=100$ деталей и $y=452{,}5$ рублей при $x=300$ деталей. Требуется:

1. провести оценку двух вариантов технологического процесса;

2. найти себестоимость продукции для обоих вариантов при x=200.

Решение.

1. а) Для второго варианта технологического процесса параметры *a* и *b* определяем из системы уравнений:

$$\begin{cases} 157{,}5 = a \cdot 100 + b; \\ 452{,}5 = a \cdot 300 + b. \end{cases}$$

Решив данную систему относительно *a* и *b*, получаем $\boxed{??}$:

a=1,475; *b*=10 => модель второго варианта технологического процесса y=1,475x+10.

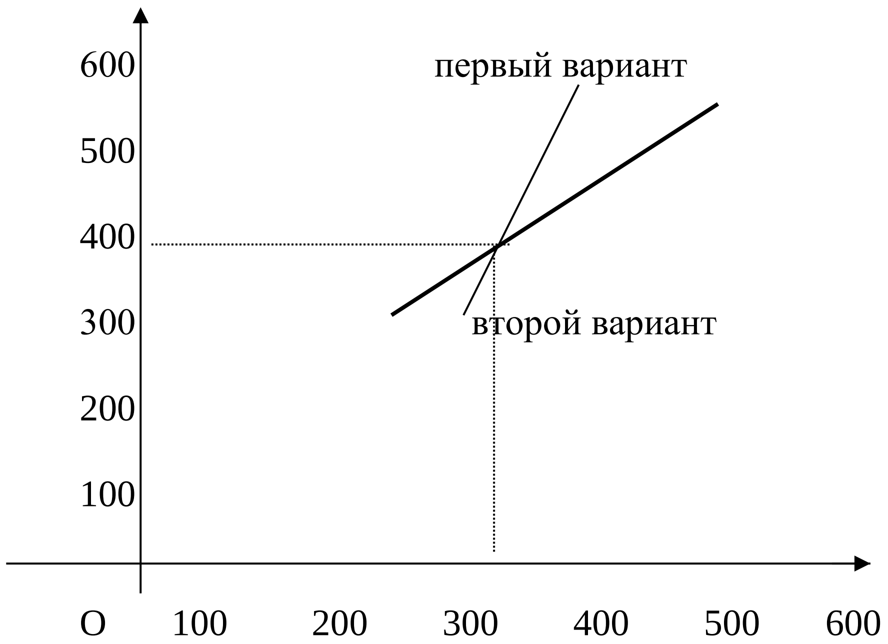


Рис. 3.8

б) Точку (x_0; y_0) пересечения двух прямых найдём, решив следующую систему двух уравнений, описывающих оба технологических процесса:

$$\begin{cases} y=1{,}45x+20; \\ y=1{,}475x+10. \end{cases}$$

Решение данной системы $\boxed{??}$: $x_0 = 400$; $y_0 = 600$ деталей.

в) Из рис.3.8 видно, что при объеме партии x < 400 выгоднее второй вариант технологического процесса при x > 400 – первый вариант.

2. Найдем себестоимость продукции при x=200 деталей:

а) для первого варианта: $y_I = y(200) = 1{,}45 \cdot 200 + 20 = 310$ рублей;

б) для второго варианта: $y_{II} = y(200) = 1{,}475 \cdot 200 + 10 = 305$ рублей.

Ответ.

1. При $x < 400$ выгоднее второй вариант, при $x > 400$ – первый.

2. 310 и 305 рублей.

Задача 3.7 Дан параллелограмм ABCD, где A(-2;3), B(1;2), C(5,3). Составить уравнения его сторон и найти координаты точки D.

Решение.

1. Уравнения сторон AB и AC найдем как уравнения прямых, проходящих через две точки:

AB: $\boxed{??}$ => $\dfrac{x+2}{1+2} = \dfrac{y-3}{2-3}$ => $x + 3y - 7 = 0$ уравнение AB; $k_{AB} = -1/3$;

BC: $\boxed{??}$ => $\boxed{??}$ => $x - 4y + 7 = 0$ уравнение BC; $k_{BC} = 1/4$.

2. Прямая CD проходит через точку C параллельно стороне AB, поэтому $y - y_c = k_{CD} \cdot (x - x_c)$. Т.к CD || AB, то по условию параллельности: $k_{CD} = k_{AB} = -1/3$. Тогда:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 5) \quad \Rightarrow \quad x + 3y - 14 = 0$$ – уравнение CD.

3. Прямая AD проходит через точку A параллельно стороне BC,

$k_{AD} = k_{BC} = 1/4$ => $y - y_A = k_{AD} \cdot (x - x_c)$ => $y - 3 = \dfrac{1}{4}(x+2)$ => $\boxed{??}$

$x - 4y + 14 = 0$ – уравнение AD.

4. Точка D есть точка пересечения прямых AD и DC, т.е $D = AD \cap CD$ (рис.3.9).

Поэтому точку D можно найти, совместно решив уравнения прямых AD и CD:

$$\begin{cases} x - 4y + 14 = 0; \\ x + 3y - 14 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 4y = 14; \\ x + 3y = 14. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$(x - x) + (-4y - 3y) = -14 - 14$ => $-7y = -28$ => $y = 4$. Тогда: $x + 3 \cdot 4 = 14$ => $x = 2$ => координаты искомой точки D(2;4).

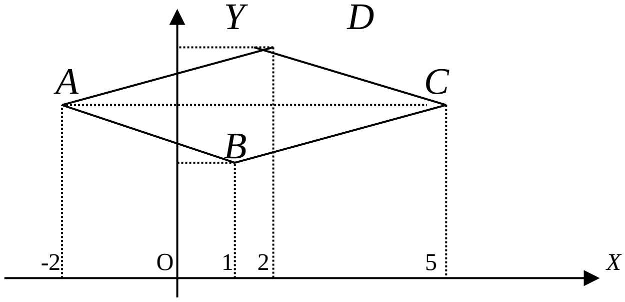


Рис. 3.9

Ответ. x+3y-7=0; x-4y+7=0; x-4y+14=0; x+3y-14=0; D(2;4).

3.3. Задачи для самостоятельного решения

101. Построить прямые, найти их угловые коэффициенты и координаты нормальных векторов: а) y=3x –4; б) 4x+y=0;

в) 5x + 3y –15=0; г) 5 – x=0; д) 2y+4=0.

102. Уравнения прямых: а)3x-5y-15=0; б)5x-3y+10=0 привести к виду уравнений в отрезках. Построить данные прямые.

103. Дано общее уравнение прямой: 12x-5y-65=0. Написать:

а) уравнение с угловым коэффициентом;

б) уравнение в отрезках на осях.

104. Построить прямую, отсекающую на оси ординат отрезок *b*=3 и составляющую с осью *OX* угол 45^0.

105. Написать уравнение прямой, проходящей через точку М (1;-4) перпендикулярно вектору $\overline{n}$ = (2;6). Построить прямую и вектор.

106. Составить уравнение прямой, перпендикулярной отрезку АВ, где А(2;3), В(4;-5), если прямая проходит через точку С(5;2).

107. Даны прямые:

a: 3x-2y+7-0; *b*: 6x-4y-9=0;

c: 6x+4y-5=0; *d*: 2x+3y-6=0.

Указать среди них параллельные и перпендикулярные.

108. Найти угол между прямыми:

а) $x-\sqrt{3}\bullet y+2=0$ и $\sqrt{3}x-y+5=0$; б) 4x+3y =12 и 2x –3y=25.

109. Написать уравнение прямой проходящей через точки A(-1; 3) и B(4;-2). Найти угловой коэффициент этой прямой.

110. Найти угол, образованный с положительным направлением оси абсцисс прямой, проходящей через точки $M(2;\sqrt{3})$, $N(3; 2\sqrt{3})$.

111. Составить уравнение прямой, параллельной вектору $\bar{s}$ = (3;4) и проходящей через точку A(-2;5).

112. Точка C является серединой отрезка AB, где A (-3;4), B (4;6). Составить уравнение прямой, проходящей через точку C:

а) параллельно прямой 2x+3y+4=0;

б) перпендикулярно прямой 2x+3y+4=0.

113. Показать, что прямые 3x –2y +1=0 и 2x + 5y –12=0 пересекаются и найти координаты их точки пересечения.

114. Определить расстояние от точки M(2;1) до прямой 3x + 4y – 98=0.

115.Стороны треугольника описываются уравнениями:

x +3y –7=0 (AB), 4x –y –2=0 (BC), 6x +8y –35=0 (AC).

Найти длину высоты, проведенной из вершины B.

116. Дан треугольник ABC, где A(-2;0), B (2;6), C (4;2). Требуется:

I. Написать уравнение прямых, на которых лежат:

1. сторона BC; 2. медиана BE; 3. высота BD;

II. Найти длину: 1. стороны AC; 2. высоты BD.

III. Точку O пересечения медиан треугольника.

IV. Определить тангенс и косинус внутреннего угла при вершине B.

117. Издержки производства 200 единиц некоторого товара составляют y_1=300 рублей, а 400 штук – 700 рублей. Определить издержки производства 450 единиц товара при условии, что функция линейна.

118.Прибыль от продажи товара в двух магазинах выражается функциями: $y = -2+3x$ и $y = -4 + \frac{7}{2}x$, где x – количество товара (в сотнях штук), а y – прибыль (в тыс. руб.). Определить более выгодный вариант продаж.

119. Построить прямые и найти их угловые коэффициенты:

а) $x+2y-2=0$; б) $3x-2y-6=0$; в) $x-3y=0$;

г) $7x+14=0$; д) $10y-100=0$.

120. Лежат ли на прямой $3x-2y+3=0$ точки А (1;3), В(2;4), С(1;4)?

121. Написать уравнение прямой, проходящей через точку А (-2;1) и образующей с осью абсцисс угол в 135^0.

122. Дана прямая $2x-y+3=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку К (1;2): а) параллельно к данной прямой;

б) перпендикулярно к данной прямой.

123. Найти угол между прямыми: а) $3x-2y+5=0$ и $2x+3y-8=0$;

б) $2x-3y+8=0$ и $4x-6y-3=0$; в) $5x-y+3=0$ и $3x+2y-4=0$.

124. Определить вершины и углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x+3y=0$, $x=3$, $x-2y+3=0$.

125. Даны вершины треугольника АВС: А (4;6), В (-4;0), С (-1;-4). Требуется:

I. составить уравнения: 1. всех трех сторон треугольника; 2. медианы СЕ; 3. высоты AD; 4. биссектрисы ВК.

II. Найти длины: 1. сторон треугольника; 2.высоты AD.

III. Определить точку О пересечения медиан треугольника.

IV. Определить внутренний и внешний углы при вершине А.

126. Даны три вершины параллелограмма – точки А(3;-5), В(5;-3), С(-1;3). Определить четвертую вершину D, противоположную В.

127. Прибыль от продажи 50 штук некоторого товара составляет 50 руб., а 100 штук –200 руб. Определить прибыль от продажи 500 единиц товара при условии, что функция прибыли линейна.

---

128. Построить прямые: а) $x-2y+5=0$; б) $2x+3y=0$; в) $5x-2=0$; г) $2y+9=0$. Найти их угловые коэффициенты и нормальные векторы.

129. Можно ли уравнение прямой $19x+98y=0$ записать в виде уравнения в отрезках на осях?

130. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $5x + 5y - 7 = 0$?

131. Построить прямую, отсекающую на оси *ОУ* отрезок $b = -3$ и составляющую с осью *ОХ* угол: 1)60^0; 2) 120^0. Написать уравнения этих прямых.

132. Построить прямую, проходящую через начало координат и через точку (-2;3), написать ее уравнение.

133. Прямые $y = -2$ и $y = 4$ пересекают прямую $3x - 4y - 5 = 0$ соответственно в точках А и В. Построить вектор $\overline{AB}$, определить его длину и его проекции на оси координат.

134. Составить уравнения прямых, проходящих через точку М (4; –5) и параллельных осям координат.

135. Составить уравнение прямой, проходящей через точки:

а) А (3;1) и В(5;4); б) А(3;1) и С(3;5); в) А (3;1) и D(-4;1).

136. Стороны АВ, ВС и АС треугольника АВС заданы соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$; $x - 3y + 10 = 0$; $x - 2 = 0$. Определить координаты его вершин.

137. Дана прямая $8x - y + 11 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку С (-4;2): а) параллельно данной прямой,

б) перпендикулярной данной прямой.

138. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x - 3y + 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ параллельно и перпендикулярно прямой $x - y + 1 = 0$.

139. Доказать, что следующие пары прямых параллельны:

а) $2x + 3y - 3 = 0$ и $4x + 6y + 1 = 0$;

б) $y = 2x - 3$ и $y = 2x + 5$.

140. Доказать, что следующие пары прямых взаимно перпендикулярны:

а) $2x + 3y + 1 = 0$ и $6x - 4y + 8 = 0$; б) $x + 2y - 5 = 0$ и $6x - 3y + 7 = 0$.

141. Определить расстояние между параллельными прямыми:

а) $3x - 4y - 6 = 0$ и $6x - 8y + 28 = 0$; б) $15x + 36y = 105$ и $5x = -12y - 30$.

142. Дана прямая $12x - 5y - 26 = 0$. Составить уравнения прямых, параллельных данной и отстоящих от нее на расстоянии $d=2$.

143. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $x+2y=0$, $x+4y-6=0$, $x-4y-6=0$.

144. Написать уравнения сторон и найти углы треугольника с вершинами A (0;7), B(6;-1), C(2; 1).

145. Найти точку пересечения медиан и точку пересечения высот треугольника, вершины которого A(-4;2), B(2;-5), C(5;0).

146. Найти длины высоты BD, медианы BE и биссектрисы BL в треугольнике с вершинами A(-3;0), B (2;5), C(3;2).

147. Дан треугольник с вершинами A(0;-4), B(3;0), C(0;6). Найти расстояние от вершины C до биссектрисы угла A.

148. Даны вершины треугольника A(-4;3), B(4;-1) и точка пересечения высот M(3;3). Найти третью вершину C.

149. Дан треугольник с вершинами A(-2;0), B(2;4), C(4;0). Найти уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и длину медианы AE.

150. Даны вершины треугольника A(2;-2), B(3;-5), C(5;1). Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине B.

151. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если дана вершина прямого угла C(3;-1) и уравнение гипотенузы $3x - y + 2 = 0$.

152. Составить уравнения сторон треугольника, для которого точки A(-1;2), B(3;-1), C(0;4) являются серединами сторон.

153. Составить уравнения сторон треугольника, если даны одна из его вершин (-1;2) и уравнения двух медиан $4x - y - 8 = 0$, $5x + 4y - 17 = 0$.

154. В треугольнике ABC даны уравнения стороны AB: $x+7y-6=0$ и биссектрис AL: $x + y - 2 = 0$ и BM: $x - 3y - 6 = 0$. Найти координаты вершин. *Указание*: Найти координаты вершин A и B и симметричные им точки A_1 и B_1 относительно соответствующих биссектрис. Прямые AB_1 и BA_1 – две другие стороны треугольника.

155. Дан треугольник с вершинами A (3;5), B (6;-2), C (-4;-1). Найти уравнение перпендикуляра, проведенного из вершины B на медиану, исходящую из вершины A.

156. Даны точки O (0;0) и A(-3;0). На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке B(0;2). Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

157. Даны две смежные вершины A(2;5) и B(5;3) параллелограмма ABCD и точка M(-2;0) пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон этого параллелограмма.

158. Две стороны квадрата лежат на прямых 4x-3y+15=0 и 8x-6y+25=0. Вычислить его площадь.

159. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями y = x –2 и x – 5y + 6=0. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения диагоналей и двух других сторон параллелограмма.

160. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон: x +2y = 4 и x + 2y =10 и уравнение одной из его диагоналей y = x+2.

161. Точка M (x; y) движется так, что разность квадратов расстояний от нее до точек A (-a; a) и B (a; -a) остается равной $4a^2$. Написать уравнение ее траектории.

162. Какая должна быть зависимость между коэффициентами *a* и *b*, чтобы прямая $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ образовала с осью *OX* угол : а) 45^0; б) 60^0?

163. Дана прямая 2x + y –3 =0 и точка A(-2;3). Через точку A провести прямую, наклоненную к данной прямой под углом 45^0.

164. В точке пересечения прямой 2x – 5y – 10=0 с осями координат восстановлены перпендикуляры к этой прямой. Написать их уравнения.

165. Составить уравнения прямых, перпендикулярных к прямой 2x+6y – 3=0 и отстоящих от точки (5;4) на расстояние $\sqrt{10}$ единиц.

166. Издержки перевозки двумя видами транспорта выражаются уравнениями: y=150+50x и y=250+25x, где *x* – расстояние (в сотнях км.), *y* – транспортные расходы (в тыс. руб.). Начиная с какого расстояния, более экономичен второй вид транспорта?

167. Зная, что изменение объема производства *y* в зависимости от изменения производительности труда *x* происходит по прямой линии, составить ее уравнение, если при *x=3y*=185, а при *x*=5 *y*=305. Определить объем производства при *x*=20.

Т е с т 3

1. Найти сумму ($x_0 + y_0$), где x_0, y_0 – координаты точки пересечения медиан треугольника ABC, где A(2;4), B(-3;0), C(7;-7).

2. Найти расстояние между параллельными прямыми:

y = – 0,75x – 6 и 3x + 4y –12 =0.

3. Нормальный вектор $\overline{n}$ прямой Ax + By + C = 0 имеет координаты а) $\overline{n} = (A;B)$; б) $\overline{n} = (A;B;C)$;

в) $\overline{n} = (A;C)$; г) $\overline{n} = (-\frac{A}{B};\frac{C}{2B})$.

4. Если прямая перпендикулярна оси *OX*, то ее угловой коэффициент равен:

а)1; б)90^0 ; в)0; г)∞.

5. Прямая *y = x* образует с положительным направлением оси абсцисс угол:

а) 0^0 ; б)$\frac{\pi}{4}$, в)$\frac{2\pi}{3}$, г)π.

6. Уравнение прямой, параллельной оси *OX,* имеет вид:

а) $y = -\frac{a}{c}x$, б) $x = -\frac{c}{в}y$,

в) $y = -{}^{c}\!/_{в}$; г) $x = -\frac{c}{в}$.

7. Уравнение прямой, проходящей через точки M (1;2) и N (0;3) имеет вид: а) y = - x+3; б) y = x+1;

в) x+y+3=0; г) x-y-3=0.

8. Установите соответствие между уравнениями прямых и их названиями:

1) общее уравнение прямой	а) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$;
2) уравнение прямой с угловым коэффициентом	б) $y = kx + b$;
3) уравнение прямой в отрезках	в) $y – y_1 = k\,(x – x_1)$;
4) уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении	г) $Ax + By + c = 0$;
5) уравнение прямой, проходящей через две данные точки	д) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

9. В треугольнике *ABC* известны вершины треугольника *A*(– 4;3), *B*(2;5), *C*(6;-2). Составить уравнение высоты, проведенной из вершины *A*.

Ответ: $4x + By + C = 0$, где $B = ...$, *C*=…

10. Длина медианы *AE* треугольника *ABC*, где *A*(2;4), *B*(-3;0), *C*(7;-2) равна…

11. Острый угол (в градусах) между прямыми $4x – 2y – 7 = 0$ и $y = \frac{1}{3}x – 11$ равен … .

12. Какие из данных прямых перпендикулярны прямой $2x - y + 3 = 0$:

1) 4x+8y+17=0; 2) 4x-8y-11=0; 3) $y = -\frac{1}{2}x+5$; 4) y = -2x-7; 5) $\frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$.

а) 2 и 4; б)2 и 5; в)1 и 3; г)1; 3 ; 5.

13. Уравнение прямой, проходящей через точку A(–3;4) параллельно прямой 2x –3y+7=0 имеет вид:

а) $2x + 3y - 6 = 0$;

б) $2x - 3y + 18 = 0$;

в) $2x + 3y - 1 = 0$;

г) $2x - 3y - 17 = 0$.

14. Уравнение прямой, проходящей через точку A(5;-1) под углом 45^0 к оси *OX* имеет вид y=kx+b, где k=…, b=… .

15. Расстояние от точки M(5; -3) до прямой 4x+3y + 4 =0 равно …

Вопросы для самопроверки по теме «Прямая на плоскости»

1. Прямая линия, нормальный и направляющий векторы прямой.

2.Основные виды уравнения прямой (общее, с угловым коэффициентом, в отрезках, проходящей через данную точку в данном направлении, проходящей через две данные точки).

3.Угловой коэффициент прямой, его определение для прямых, заданными различными видами уравнений прямых.

4.Исследование уравнения прямой с угловым коэффициентом.

5.Исследование общего уравнения прямой.

6.Угол между двумя прямыми: понятие, формулы для нахождения тангенса и косинуса угла между прямыми.

7.Условия параллельности и перпендикулярности двух кривых, заданных:

а) общим уравнением;

б) уравнением с угловым коэффициентом.

4. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

4.1. Необходимый теоретический минимум

Определение 4.1. **Общим уравнением кривых второго порядка** называется уравнение второй степени с двумя переменными вида

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \qquad \textbf{(4.1)}$$

где A, B, C, D, E, F – числа и $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Различают следующие виды кривых второго порядка:

1. *эллиптический* (если $AC-B^2 > 0$); 2. *гиперболический* (если $AC-B^2 < 0$);
3. *параболический* (если $AC-B^2 = 0$).

Определение 4.2. **Эллипсом** называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть постоянная величина, большая, чем $|F_1F_2|$.

! Фокусы эллипса могут располагаться или на оси абсцисс или на оси ординат. На рис. 4.1. изображен эллипс, фокусы которого лежат на оси *OX*; а на рис. 4.2 –эллипс с фокусами на оси *OУ*.

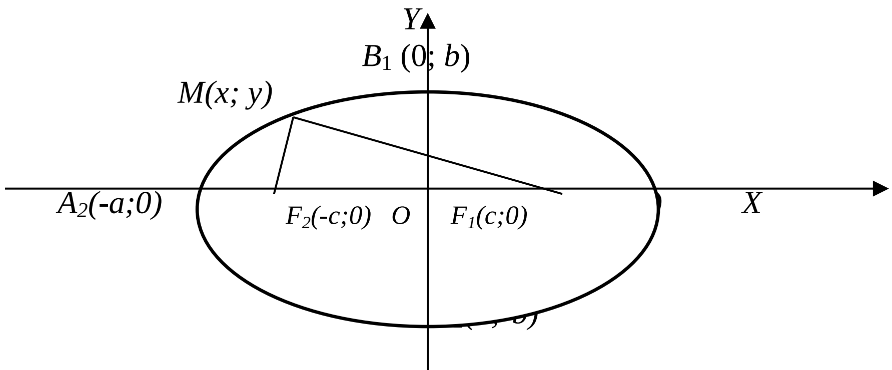


Рис. 4.1

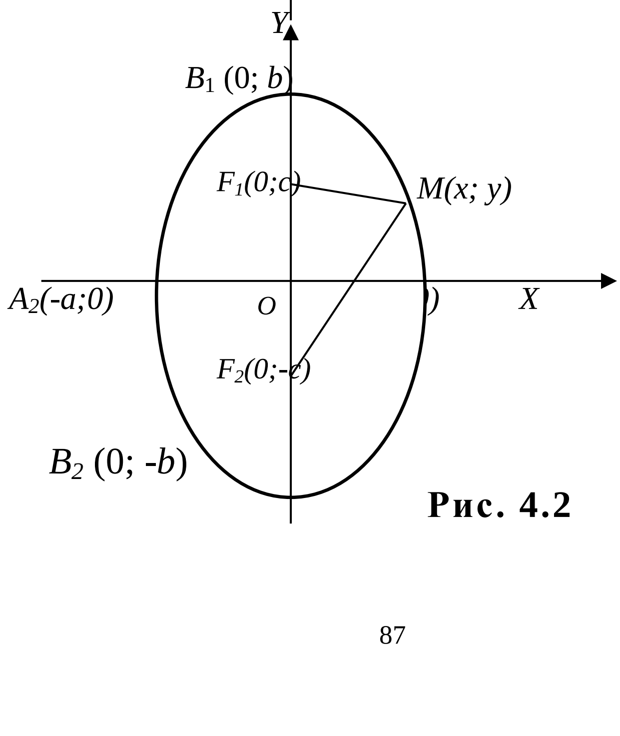


Рис. 4.2

Определение 4.3. **Гиперболой** называется геометрическое место точек, для которых модуль разности расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 (фокусов) есть постоянная величина, равная 2a.

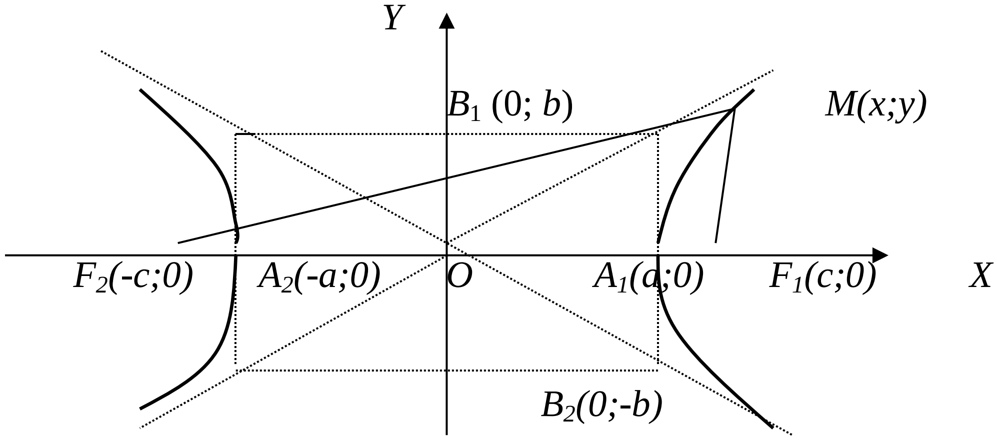


Рис. 4.3

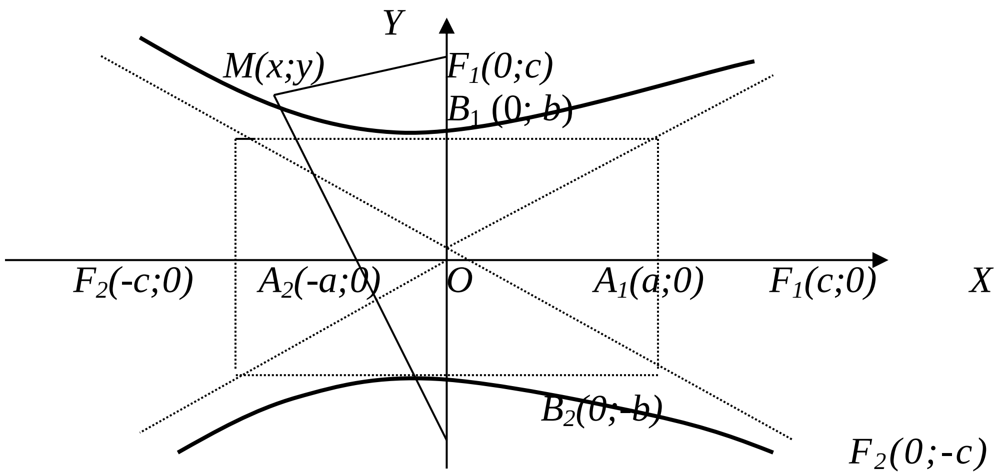


Рис. 4.4

! Фокусы гиперболы могут располагаться или на оси абсцисс или на оси ординат. На рис. 4.3. изображена гипербола, фокусы которой лежат на оси *OX*; а на рис. 4.4 – гипербола с фокусами на оси *ОУ*.

Определение 4.4. **Параболой** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки – фокуса и данной прямой – директрисы.

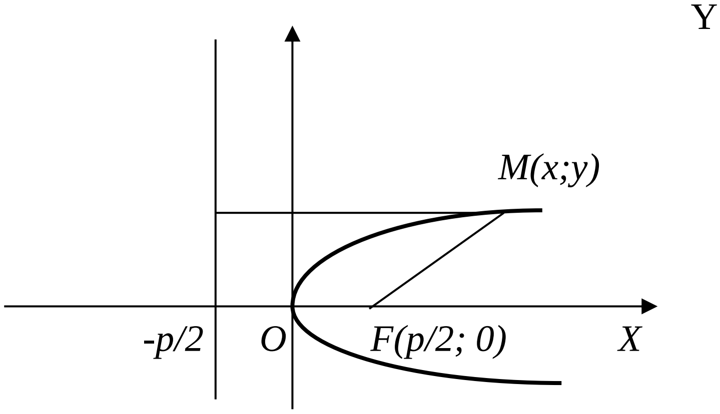


Рис. 4.5

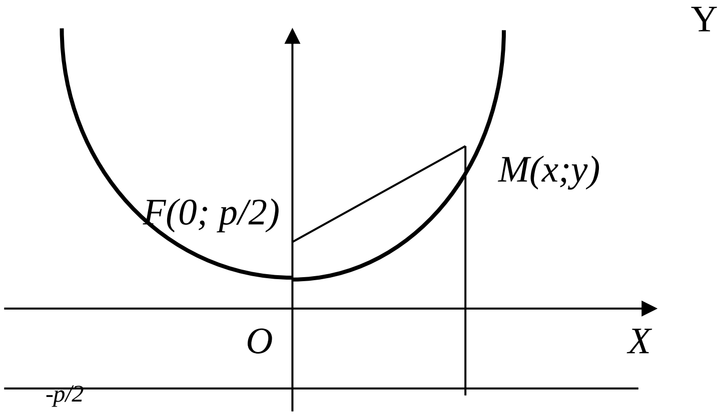


Рис. 4.6

! Фокус параболы может располагаться или на оси абсцисс или на оси ординат. На рис. 4.5. изображена парабола, фокус которой лежат на оси *OX*; а на рис. 4.6 – парабола с фокусом на оси *OУ*.

- Свод основных данных по кривым второго порядка дан в таблице 4.1.
- Кроме приведенных в таблице 4.1 кривых используется при решении задач *обратно пропорциональная зависимость* (гипербола) вида:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d};$$

«новый» центр $o'(-\frac{d}{c};\frac{a}{c});(c \neq 0, bc-ad \neq 0)$;

асимптоты: $y = {}^{a}\!/_{c}\,; x = -{}^{d}\!/_{c}$.

Таблица 4.1 - Кривые второго порядка

	Эллипс		Гипербола		Парабола	
	$F_{1,2}\in 0X$	$F_{1,2}\in 0Y$	$F_{1,2}\in 0X$	$F_{1,2}\in 0Y$	$F\in 0X$	$F\in 0Y$
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$y^2=2px$ ($p>0$– ветви вправо, $p<0$-влево)	$x^2=2py$ ($p>0$– ветви вверх, $p<0$-вниз)
Параметры	a – большая полуось, b – малая ($a>b$); $c^2=a^2-b^2$	a – малая полуось, b – большая ($a<b$); $c^2=b^2-a^2$	a – действительная полуось, b – мнимая; $c^2=a^2+b^2$	a – мнимая полуось, b – действительная; $c^2=a^2+b^2$	p-параметр	
Вершины	$A_{1,2}$ (±a;0); $B_{1,2}$ (0; ±b)		$A_{1,2}$ (±a;0) – действительная, $B_{1,2}$ (0; ±b)- мнимая вершина	$A_{1,2}$ (±a;0)- мнимая, $B_{1,2}$ (0; ±b)- действитель-ная	O (0;0)	
График	Рис. 4.1	Рис. 4.2	Рис.4.3	Рис. 4.4	Рис. 4.5	Рис.4.6
Фокусы	$F_{1,2}(\pm c;0)$	$F_{1,2}(0;\pm c)$	$F_{1,2}(\pm c;0)$	$F_{1,2}(0;\pm c)$	$F(\frac{p}{2};0)$	$F(0;\frac{p}{2})$
Эксцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$	$\varepsilon=\frac{c}{b}<1$	$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$	$\varepsilon=\frac{c}{b}>1$	$\varepsilon=1$	
Другое	-	-	Асимптоты $y=\pm\frac{b}{a}\bullet x$		Директриса $x=-\frac{p}{2}$	Директриса $y=-\frac{p}{2}$
Частные случаи	Окружность $x^2+y^2=k^2$		Равнобочная $x^2-y^2=a^2$	Равнобочная $-x^2+y^2=a^2$	-	-
Уравнение с центром в $O(x_0;y_0)$	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$		$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$	$(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$

4.2. Решение типовых задач

Задача 4.1. Построить эллипс $x^2+4y^2=16$, найти его фокусы и эксцентриситет.

Решение.

1. Приведем заданное уравнение эллипса к каноническому виду (табл.4.1): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ Для этого разделим обе части заданного выражения на 16: $\frac{x^2}{16}+\frac{4y^2}{16}=\frac{16}{16}$ => $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$. Отсюда следует, что: $a^2 = 16$, $b^2=4$, т.е. $a = 4$, $b=2$. Заметим, что $a>b$, поэтому a – большая полуось эллипса, b – малая, т.е. фокусы расположены на оси OX (см. табл. 4.1) и находятся так:

$F_{1,2}$ ($\pm c$;0), где $c^2=a^2-b^2 = 16 - 4=12$ => $c=\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ => $F_{1,2}(\pm 2\sqrt{3};0)$.

! 2c – это расстояние между фокусами, поэтому, исходя их понятия длины (или расстояния) мы пишем $c=2\sqrt{3}$, а не $c=\pm 2\sqrt{3}$.

2. Эксцентриситет эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс (табл. 4.1) найдем по формуле: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ => $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

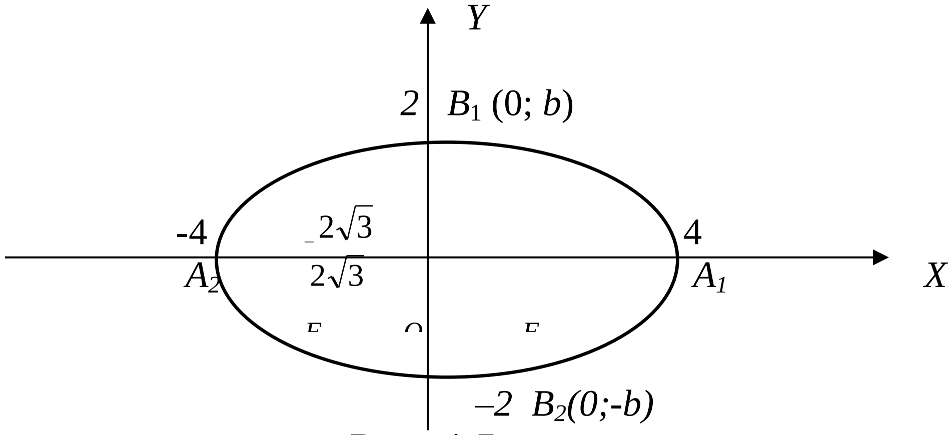


Рис. 4.7

3. *Построение эллипса* выполняют в следующем порядке:

а) отмечают вершины эллипса $A_{1,2}(\pm a;0)$; $B_{1,2}(0;\pm b)$.

В нашем случае: $A_1(4;0)$; $A_2(-4;0)$; $B_1(0;2)$; $B_2(0;-2)$.

б) Соединяют отмеченные вершины плавной линией (рис.4.7).

Ответ. $F_{1,2}(\pm 2\sqrt{3}\,0)$; $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 4.2. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что фокусы лежат на *ОУ*, расстояние между фокусами равно 8, а на оси абсцисс эллипс отсекает отрезки, равные 3. Построить данный эллипс. Найти его фокусы и эксцентриситет.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (*).$$

По условию задачи a=3, 2c=8, т.е. c=4. Так как $F_{1,2} \in OY$ (по условию), то $c^2 = b^2 - a^2$ (см. табл.4.1) => $4^2=b^2-3^2$ => $b^2=4^2+3^2=25$ => $b=\sqrt{25}=5$. Итак, a = 3 – малая полуось, b = 5 – большая полуось эллипса.

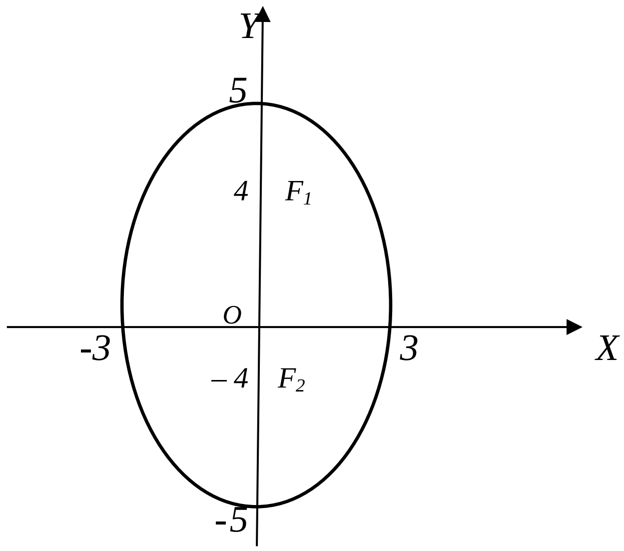


Рис. 4.8

Подставим найденные величины a и b в уравнение (*):

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ => $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ – искомое уравнение эллипса (рис. 4.8.)

Тогда $F_{1,2}(0;\pm C)$ => $F_{1,2}(0;\pm 4)$; $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{4}{5}=0{,}8.$

Ответ. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$; $F_{1,2}(0;\pm 4)$; $\varepsilon=0{,}8$.

Задача 4.3. Построить гиперболу $x^2-4y^2=16$, найти её фокусы и эксцентриситет, написать уравнения асимптот.

Решение.

1. Приведем заданное уравнение к каноническому виду (табл.4.1) и найдем фокусы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Для этого разделим обе части заданного выражения на 16: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ => фокусы лежат на оси *OX.*

Отсюда следует, что: $a^2 = 16$ => a = 4 – действительная полуось; $b^2=4$ => b = 2 – мнимая полуось гиперболы. Из таблицы 4.1 видно, что $F_{1,2}$ (±C;0), где $c^2=a^2+b^2=16+4=20$ => c= $2\sqrt{5}$ => $F_{1,2}$ ($\pm 2\sqrt{5}$;0)

2. Эксцентриситет гиперболы найдем по формуле (табл. ?)

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

3. Уравнения асимптот (см. табл.4.1):

$$y=\pm\frac{b}{a}x\Rightarrow y\pm\frac{2}{4}x\Rightarrow y=\pm\frac{x}{2} \quad .$$

4. *Построение гиперболы* выполняют в следующем порядке:

а) отмечают действительные вершины гиперболы:

$A_{1,2}$ (±a;0) => A_1(A;0); A_2(-4;0);

б) отмечают мнимые вершины: $B_{1,2}$ (0;±b) => B_1(0;2); B_2(0;-2);

в) через точки $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ проводят отрезки, параллельные соответственно осям ОУ и ОХ и продолжают их до получения прямоугольника, который называют *основным прямоугольником;*

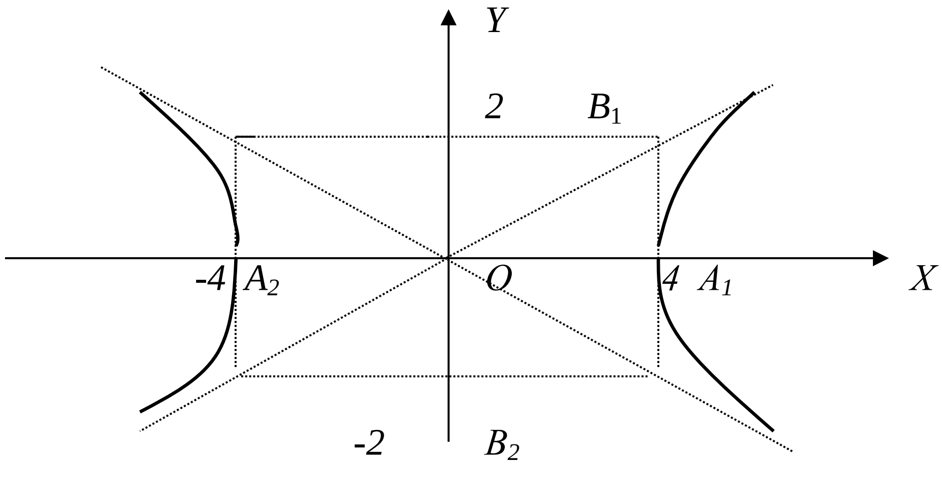


Рис. 4.9

г) в основном прямоугольнике проводят диагонали и продолжают их во все стороны – это *асимптоты* гиперболы;

д) проводят через действительные вершины две симметричные ветви гиперболы, все приближая их к асимптотам (по мере удаления от начала координат) (рис.4.9).

Ответ. $F_{1,2}$ ($\pm 2\sqrt{5}$;0); $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $y = \pm\frac{x}{2}$; рис. 4.9.

Задача 4.4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если её фокусы лежат на оси *ОУ* и расстояние между ними равно 20; действительная ось гиперболы равна 16. Найти её фокусы и эксцентриситет.

Решение. 1. Уравнение гиперболы в этом случае будет иметь вид (табл.4.1): $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где b – действительная, a – мнимая полуось гиперболы. Согласно условию 2*c*=20, 2*b*=16 => *c*=10, *b*=8.

Мнимую полуось гиперболы *a* найдем из соотношения:

$c^2 = a^2 + b^2$ => $a^2 = c^2 - b^2$ => $a^2 = 100 - 64 = 36$ => a=6.

Уравнение гиперболы имеет вид: $-\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{64}=1$ (рис.4.10).

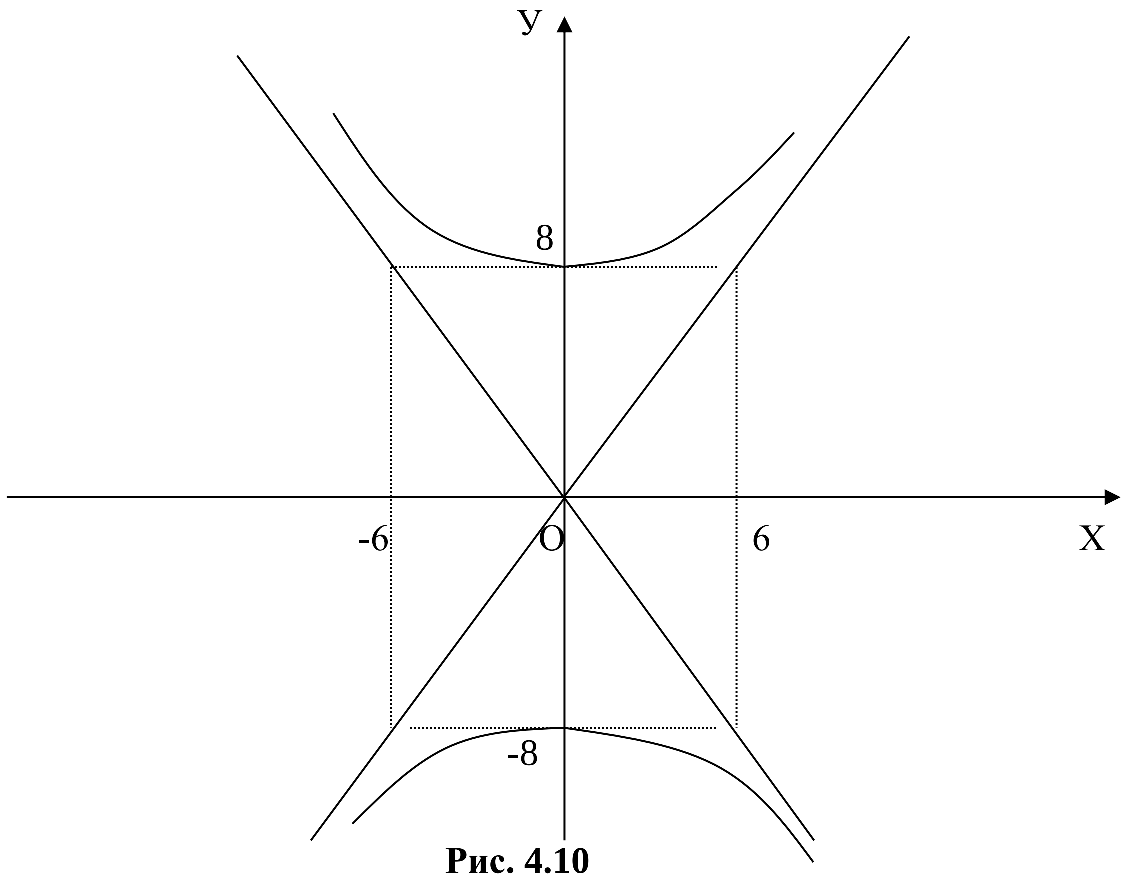


Рис. 4.10

2. Фокусы гиперболы: $F_{1,2}$ (0;±*c*) => $F_{1,2}$ (0;±10).

3. Эксцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{10}{8} = 1{,}25.$

Ответ: $-\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$ (рис.4.10); $F_{1,2}$ (0;±10); $\varepsilon = 1{,}25.$

Задача 4.3. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку А (2;4) и симметрична относительно оси *OX*. Найти уравнение параболы, записать её фокус и уравнение директрисы.

Решение.1. Т.к. парабола проходит через точку О(0;0) и симметрична относительно оси *OX*, то её фокус расположен на оси *OX*, а уравнение параболы (табл.4.1) имеет вид: y^2=2px (*).

Подставим координаты точки А в уравнение (*): 4^2=2p•2 => p=4.

Тогда искомое уравнение параболы: y^2=8x.

2. Уравнение директрисы (табл.4.1): x= –2; фокус параболы F(2;0).

3. *Построение параболы выполняют* в следующем порядке:

а) отмечают вершину параболы О (0;0);

б) отмечают любую точку, принадлежащую параболе. В нашем случае это А (2;4).

в) строят точку, симметричную относительно оси симметрии параболы (в нашем случае ОХ), т.е. A' (2;-4).

г) проводят параболу через вершину и точки А и A' (рис.4.11).

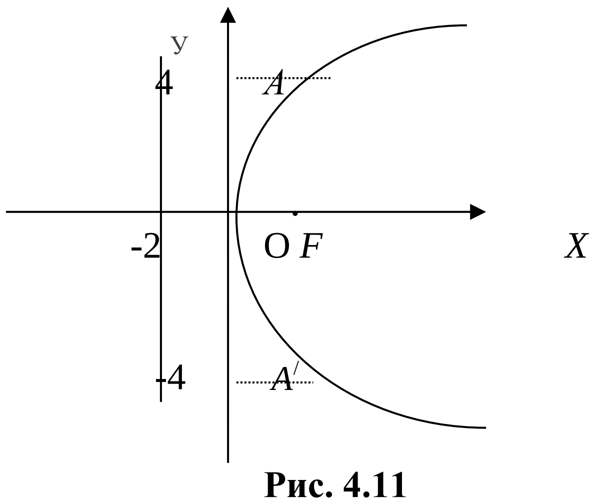


Рис. 4.11

Ответ. y^2=8x (рис. 4.11); x= –2, F(2;0).

Задача 4.6. Написать уравнение параболы и её директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой x + y = 0 и окружности $x^2 + y^2 – 4x = 0$ и симметрична относительно оси *ОУ*. Определить координаты фокуса.

Решение. 1. Найдем точки пересечения заданных линий, решив совместно уравнения:

$$\begin{cases} x + y = 0; \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{??} \quad \begin{cases} x_1 = 0,\ x_2 = 2; \\ y_1 = 0,\ y_2 = -2. \end{cases}$$

Точки пересечения: 0(0;0), A(2;-2). Т.к. парабола проходит через точку O(0;0) и симметрична относительно оси *ОУ*, то в этой точке будет находиться вершина параболы, а фокус расположен на оси *ОУ*. Поэтому уравнение параболы имеет вид (табл.4.1): $x^2 = 2py$.

Так как парабола проходит через точку A(2;-2), то координаты этой точки удовлетворяют уравнению параболы: $2^2 = 2p \bullet (-2)$ => => $– 4p = 4$ => $p = –1$. Итак, уравнение параболы: $x^2 = –2y$ (рис. 4.12).

2. Уравнение директрисы (табл. 4.1): $y = -\frac{p}{2} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

3.Фокус (табл. 4.1): F(0; $\frac{p}{2}$) => F(0; -$\frac{1}{2}$).

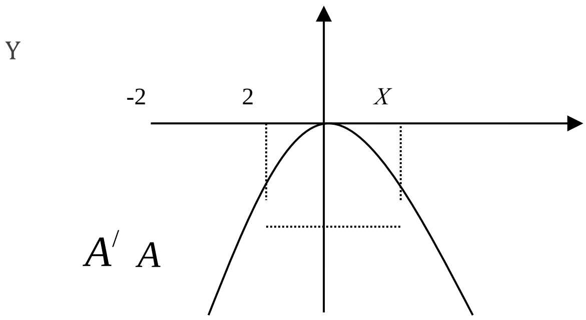


Рис. 4.12

! При построении параболы использовали найденную в пункте 1 решения данной задачи точку A(2;-2) и ей симметричную относительно оси *ОУ* точку A' (-2;-2).

Ответ. $x^2 = -2y$ (рис.4.12);

$y = \frac{1}{2}$; F(0; -$\frac{1}{2}$).

Задача 4.7. Привести кривые второго порядка к каноническому виду и построить:

1. $x^2+y^2-8x-10y-8=0$; 2. $5x^2-4y^2+16y-36=0$;

3. $y^2-2x+4y+2=0$; 4. . $y=\frac{4-3x}{x-1}$.

Решение. 1. Приведем к каноническому виду уравнение кривой $x^2+y^2-8x-10y-8=0$. Для этого: а) группируем члены уравнения, содержащие одноименные координаты: $(x^2-8x)+(y^2-10y)-8=0$;

б) дополняем члены в скобках до полных квадратов:

$(x^2-2\cdot4\cdot x+4^2-4^2)+(y^2-2\cdot5\cdot y+5^2-5^2)-8=0 \Rightarrow (x-4)^2-16+(y-5)^2-25-8=0 \Rightarrow$

$$(x-4)^2+(y-5)^2=49 \quad (*).$$

в) Обозначим: $\begin{cases} x' = & x-4 \\ y' = & y-5 \end{cases}$ – формулы параллельного переноса.

Тогда уравнения новых осей в старой системе координат имеют вид: $\begin{cases} x=4; \\ y=5. \end{cases}$

Новое начало координат помещается в точке O' (4;5).

г) Уравнение (*) в новой системе координат $X'O'Y'$ принимает вид: $X'^2+Y'^2=49$. Заданное уравнение определяет окружность с центром (находящемся в первоначальной системе координат) в точке O' (4;5) и радиусом R=7 (рис. 4.13).

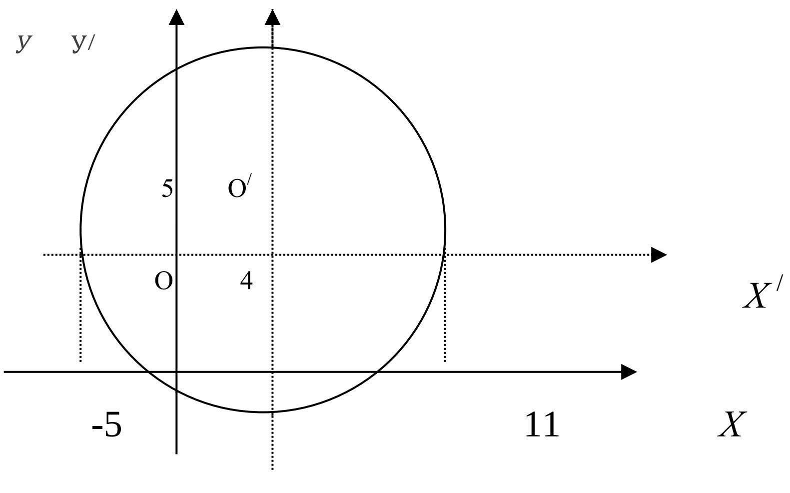


Рис. 4.13

2.Приведем к каноническому виду уравнение кривой $5x^2-4y^2+16y-36=0$.

а) Группируем члены уравнения, содержащие одноименные координаты: $5x^2 + (-4y^2+16y) - 36=0 \Rightarrow 5x^2 - 4(y^2 - 4y) - 36=0$.

б) Дополняем выражение в скобке до полного квадрата:

$5x^2 - 4(y^2 - 4y + 4 - 4) - 36 = 0 \Rightarrow 5x^2 - ((y-2)^2 - 4) - 36 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 4(y-2)^2+16 - 36=0 \Rightarrow 5x^2 - 4(y-2)^2 = 20$.

в) Разделим обе части последнего уравнения на 20:

$$\frac{5x^2}{20} - \frac{4(y-2)^2}{20} = \frac{20}{20} \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1 \quad (*).$$

г) Сравнивая последнее соотношение с уравнением гиперболы с центром в точке O' $(x_0;y_0)$ (табл. 4.1), находим координаты нового начала: $x_0=0; y_0=2$, т.е. новое начало координат помещается в точке O' (0;2). Формулы параллельного переноса: $x' = x$; $y' = y-2$. Тогда уравнение (*) в новой системе координат $X'O'Y'$ принимает вид: $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{5} = 1$. Таким образом, заданное уравнение определяет гиперболу с действительной полуосью a=2, мнимой полуосью $b=\sqrt{5}$ и центром, находящуюся в первоначальной системе координат в точке O' (0;2).

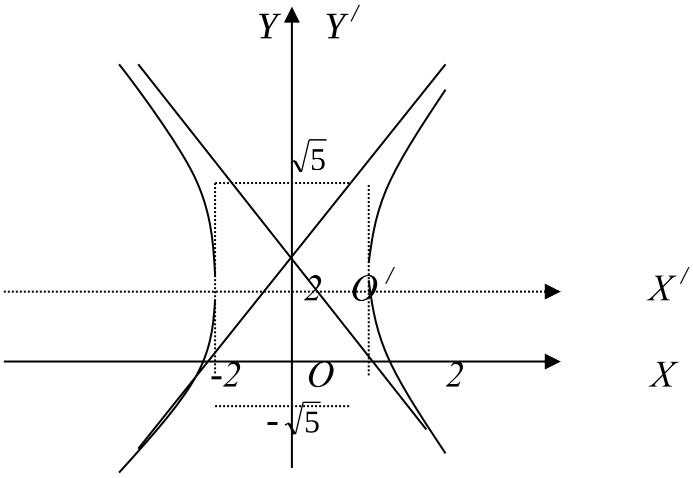


Рис. 4.14

3. Приведем к каноническому виду уравнение кривой $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

а) Группируем члены с одноименными координатами: $(y^2+4y) - 2x + 2 = 0$.

Дополняем выражение в скобках до полного квадрата:

$(y^2 + 2 \cdot 2 \cdot y + 4 – 4) – 2x + 2 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 – 4 – 2x + 2 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 – 2x – 2 = 0 \Rightarrow$ $(y+2)^2 = 2(x+1)$ (*).

б) Сравниваем выражение (*) с уравнением параболы, фокус которой расположен на оси OX с центром в точке O' ($x_0;y_0$) (табл.4.1.):

$(y – y_0)^2 = 2p(x – x_0)$.

Поэтому координаты нового начала: $x_0 = –1$, $y_0 = – 2$, т.е. O' (-1;-2).

в) Формулы параллельного переноса: $\begin{cases} x' = & x+1; \\ y' = & y+2. \end{cases}$ (**)

Уравнения новых осей координат в старой системе координат : $\begin{cases} x = -1; \\ y = -2. \end{cases}$

В результате параллельного переноса осей координат по формулам (**) уравнение (*) в новой системе координат $X'O'Y'$ принимает вид: $y^2 = 2x'$. Заданное уравнение определяет параболу с вершиной в точке O' (-1;-2), осью симметрии $O'X'$ и параметрам p=1 (рис.4.15).

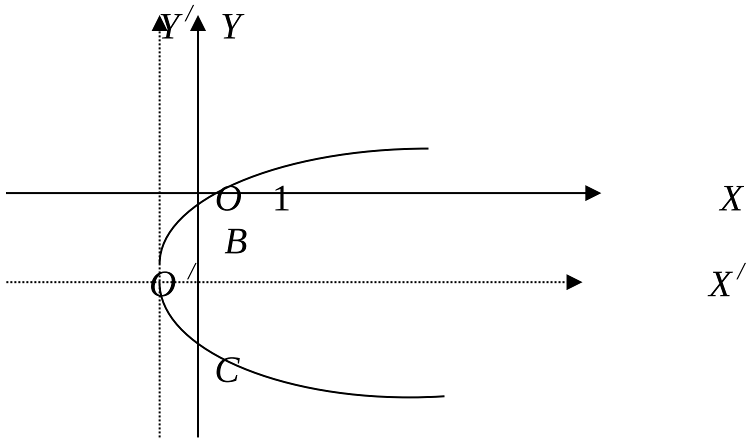


Рис. 4.15

г) Для более точного построения кривой можно найти её точки пересечения со старыми осями координат:

- <u>с осью ОХ (у=0):</u> $0^2 - 2x + 4 \cdot 0 + 2 = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$.

(Подставили у=0 в первоначальное уравнение кривой). Итак, А(1;0)- точка пересечения параболы с осью ОХ.

- <u>с осью ОУ (х=0):</u> $y^2 - 2 \cdot 0 + 4y + 2 = 0 \Rightarrow y^2 + 4y + 2 = 0 \Rightarrow$ решим полученное квадратное уравнение:

$D = 4^2$-4•1•2=8=>$У_{1,2}$=$\dfrac{-4\pm\sqrt{8}}{2} = \dfrac{-4\pm 2\sqrt{2}}{2} = -2\pm\sqrt{2}$ =>

y_1 =-2-$\sqrt{2} \approx -3{,}4$;y_2=-2+$\sqrt{2} \approx -0{,}6$.

Итак, точки пересечения с осью *ОУ*: В(0;-2-$\sqrt{2}$), С(0;-2+$\sqrt{2}$).

4. Приведем к каноническому виду уравнение кривой у = $\dfrac{4-3x}{x-1}$. Можно данную кривую привести к каноническому виду различными способами.

I способ

а) Имеем дробно-линейную функцию вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($c\neq 0$; $bc-ad\neq 0$), графиком которой является равнобочная гипербола с асимптотами $y = \dfrac{a}{c}$, $x = -\dfrac{d}{c}$, параллельными осями координат, с центром в точке O' $(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c})$.

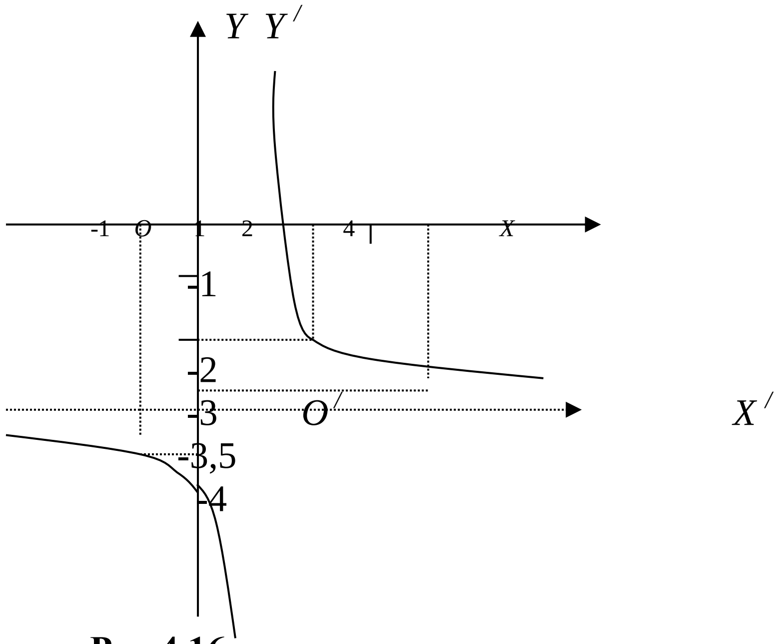


Рис 4.16

б) В нашем случае: $y = \dfrac{-3x+4}{x-1}$ => a=-3; b=4; c=1; d=-1 =>

$\dfrac{a}{c} = -3$; $-\dfrac{d}{c} = 1$. Тогда новое начало координат есть точка О(1;-3).

Теперь можно записать уравнения новых осей координат (которые и будут являться асимптотами): $\begin{cases} x = 1; \\ y = -3. \end{cases}$

г) Найдем точки пересечения заданной кривой со старыми осями координат:

- с ОХ (у=0): $\frac{4-3x}{x-1} = 0$ => 4-3х = 0 => $x = \frac{4}{3}$ => А ($\frac{4}{3}$;0).
- с ОУ(х=0): $\frac{4-3\bullet 0}{0-1} = -4$ => В(0;-4).

д) Итак, заданное уравнение представляет равнобочную гиперболу с асимптотами х=1, у=-3 и центром, находящимся в первоначальной системе координат в точке О (1;-3) (рис. 4.16).

• Для уточнения вида графика найдём несколько дополнительных точек:

х	-1	2	4
у	-3,5	-2	$-2\frac{2}{3}$

II способ

Преобразуем выражение $y = \frac{4-3x}{x-1}$ с помощью «деления уголком» так, чтобы выделить целую часть дробно-линейной функции:

$$\begin{array}{r|l} -3x+4 & x-1 \\ \hline -\,(-3x+3) & -3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

=> -3х + 4 = -3(х-1)+1.

Тогда:

$$y = \frac{-3x+4}{x-1} = \frac{-3(x-1)+1}{x-1} = \frac{-3(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} \Rightarrow$$

$$y = -3 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow y + 3 = \frac{1}{x-1} (*) \Rightarrow$$

=> О $^{/}$ (1;-3); $\begin{cases} x^{/} = x - 1; \\ y^{/} = y + 3; \end{cases}$ => $y' = \frac{1}{x'} \Rightarrow$ обратная пропорциональная зависимость, график которой есть равносторонняя гипербола с асимптотами, которыми являются новые оси координат (расположенная в I и III координатных четвертях).

Задача 4.8 Составить уравнение окружности, если ее центр находится в точке С (5;4) и окружность отсекает от прямой x+2y-3=0 хорду, длина которой 8.

Решение. Искомое окружности уравнение (см. табл. 4.1) будет иметь вид: $(x-5)^2+(y-4)^2=R^2$.

Определим расстояние центра С от данной прямой (формула (3.1)):

$$d=|CD|=\frac{|1\bullet 5+2\bullet 4-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}.$$

Так как радиус, перпендикулярный к хорде, делит её пополам, то половина хорды будет равна 4 единицам.

По теореме Пифагора имеем: $R^2=4^2+|CD|^2=16+20=36$. Итак, $R^2=36$, откуда находим, что $R=6$.

Тогда искомое уравнение окружности: $(x-5)^2+(y-4)^2=36$.

Ответ. $(x-5)^2+(y-4)^2=36$.

Задача 4.9. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус эллипса $75x^2+25y^2=225$ и «отрицательную» вершину гиперболы $-6y^2+9x^2=1$. Сделать чертеж.

Решение.

1.Преобразуем уравнение эллипса:

$75x^2+25y^2=225$ => $\frac{75x^2}{225}+\frac{25x^2}{225}=\frac{225}{225}\Rightarrow$ $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow$ $a^2=3$=>

$a=\sqrt{3}$ – малая полуось; $b^2=9$ => $b=3$ – большая полуось.

Так как $b>a$, то фокусы эллипса лежат на оси ординат, т.е. $F_{1,2}(0;\pm c)$, где $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$. Таким образом, левый фокус гиперболы имеет координаты: $F_1(0;-\sqrt{6})$.

2. Перепишем уравнение гиперболы в виде: $\frac{x^2}{1/9}-\frac{y^2}{1/6}=1$.

Отсюда видно, что $a^2 = \frac{1}{9}$, $b^2 = \frac{1}{6}$, т.е. $a = \frac{1}{3}$ – действительная полуось, а $b = \frac{1}{\sqrt{6}}$ – мнимая полуось гиперболы. Тогда $A_{1,\ 2}\ (\pm\frac{1}{3};\ 0)$ – действительные вершины гиперболы, значит, $A_1\,(-\frac{1}{3};0)$ – её «отрицательная» вершина.

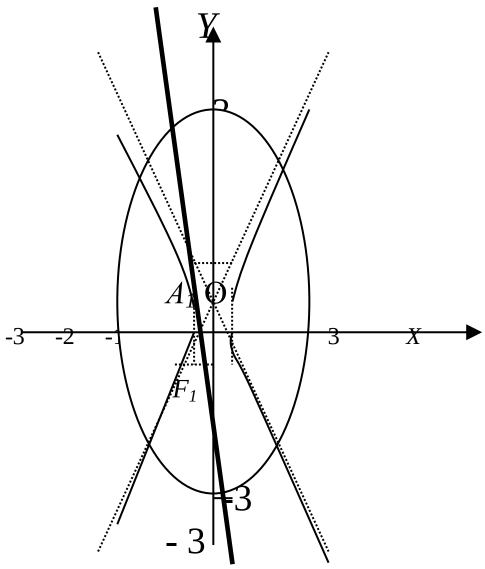


Рис. 4.17

3. Уравнение прямой, проходящей через точки $F_1(0;-\sqrt{6})$ и $A_1\,(-\frac{1}{3};0)$ найдем по формуле ?:
$$\frac{x+\frac{1}{3}}{0+\frac{1}{3}} = \frac{y-0}{-\sqrt{6}-0} \Rightarrow 3\bullet\sqrt{6}x + y + \sqrt{6} = 0$$
– искомое уравнение прямой. Чертеж к задаче представлен на рис. 4.17.

Ответ. $3\bullet\sqrt{6}x + y + \sqrt{6} = 0$.

Задача 3.17. Найти уравнение прямой, проходящей через центр гиперболы $y = \frac{4x-4}{2x+1}$ параллельно прямой АВ, где А $(3;\ -\frac{1}{3})$, а В – вершина параболы $y = -x^2 + 2x - \frac{1}{3}$. Сделать чертеж.

Решение. 1.В уравнении гиперболы выделим целую часть. Получим :

$$y=\frac{4(x-1)}{2(x+\frac{1}{2})}=\frac{2(x+\frac{1}{2})-3}{x+\frac{1}{2}}=\frac{2(x+\frac{1}{2})}{x+\frac{1}{2}}-\frac{3}{x+\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{x+\frac{1}{2}}\Rightarrow y=2-\frac{3}{x+\frac{1}{2}}\Rightarrow y-2=-\frac{3}{x+\frac{1}{2}}.$$

Полагая $x'=x+\frac{1}{2}$; $y'=y-2$, получим в новый системе координат $X'O'Y'$ с центром $O'(-\frac{1}{2};2)$ гиперболу $y'=-\frac{3}{x'}$, ветви которой расположены во II и IV четвертях (? почему) (рис. 4.18).

2. Найдем вершину параболы у $=-x^2+2x-\frac{1}{3}$. Для этого, выделив полный квадрат, представим уравнение параболы в виде:

$$\text{у}=-x^2+2x-\frac{1}{3}=-(x-1)^2-\frac{1}{3}+1=-(x-1)^2+\frac{2}{3}\Rightarrow y-\frac{2}{3}=-(x-1)^2.$$

Отсюда следует, что вершина параболы находится в точке В$(1;\frac{2}{3})$, а ветви ее направлены вниз.

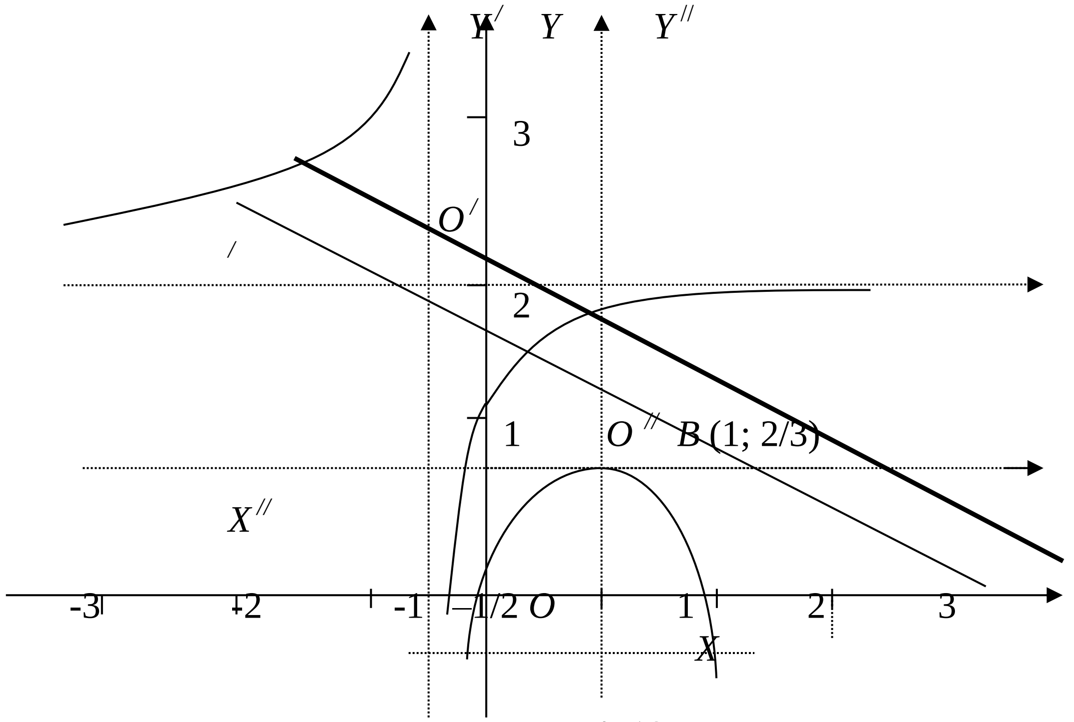


Рис. 4. 18

3. Уравнение искомой прямой находим по формуле ?,

т.е. $y-y_{0^/}=k\left(x-x_{0^/}\right)$(*), где $O'(-\frac{1}{2};2)$. Искомая прямая параллельна прямой АВ, поэтому по *условию параллельности* $k=k_{AB}$.

Т.к. А (3; $-\frac{1}{3}$), В (1; $\frac{2}{3}$), то по формуле ⍰ $k_{AB}\dfrac{y_A-y_B}{x_B-x_\beta}=\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{1-3}=-\dfrac{1}{2}$, то есть k=- $\frac{1}{2}$. Подставим в уравнение (*): y – 2= $-\frac{1}{2}$(x + $\frac{1}{2}$) => ⍰⍰ $2x+4y-7=0$ – искомое уравнение прямой (рис. 4.18).

Ответ. $2x + 4y - 7 = 0$.

4.3. Задачи для самостоятельного решения

168. Написать уравнение окружности с центром С (-4;3), радиусам R=5 и построить ее. Лежат ли на этой окружности точки А (-1;-1), В (3;2),О (0;0) ?

169. Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что большая полуось a=6, а эксцентриситет ε =0,5.

170.Написать каноническое уравнение гиперболы, зная, что:

1) расстояние между фокусами $2c=10$, а между вершинами $2a=8$;

2) действительная полуось $a=2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{1{,}2}$.

171. Написать уравнение параболы проходящей через точки (0;0) и (2;-4) и симметричной относительно оси *ОУ*.

172. Построить кривые и отметить фокусы, найти эксцентриситеты:

1) $x^2 + 4y^2 = 16$; 2) $4x^2 + y^2 = 36$;

3) $-25y^2 + 9x^2 = 225$; записать уравнения асимптот;

4) $2y^2 - x = 0$, записать уравнение директрисы;

5) $x^2 + 5y = 0$, записать уравнение директрисы.

173. Определить тип кривых второго порядка, привести их к каноническому виду и построить:

1) $x^2 + y^2 + 7y = 0$; 2) $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$;

3) $4y^2 - 3x^2 + 120 = 48y - 12x$; 4) $x^2 - 10x = 4y - 13$; 5) $y=\dfrac{2}{x+1}+1$.

174. Уравнения кривых с помощью параллельного переноса осей координат привести к каноническому виду. Построить старые и новые оси координат, а также саму кривую. Найти точки пересечения кривых со старыми осями координат:

1) $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$; 2) $(3x - 5)\cdot y = x + 4$.

175. Составить уравнение прямой, проходящей через правый фокус эллипса $25x^2 + 75y^2 = 225$ и «положительную» вершину гиперболы $\dfrac{y^2}{6} - 9x^2 = 1$. Построить чертеж.

176. Написать уравнение прямой, проходящей через центр окружности $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, параллельно асимптоте гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$. (Взять асимптоту, проходящую через II и IV координатные четверти). Сделать чертеж.

177. Известно, что прямая проходит через точки А и В, где А (3;3), а точка В есть точка пересечения с осью ординат директрисы параболы $y = x^2+2x+3$. Найти уравнение прямой АВ.

178. Известны функции спроса Q_p и предложения Q_s для данного товара. Построить соответствующие линии спроса и предложения. Найти рыночную цену товара (когда спрос совпадает с предложением), а также соответствующий ей объем производства , если:

1) $Q_p = 4 - p^2$; $Q_s = 4p - 1$; 2) $Q_p = \dfrac{2}{p}$; $Q_s = 0{,}25p^2$.

---

179. Написать уравнение окружности с центром С (-2;3) и радиусом, равным 5. Построить окружность. Определить принадлежность точек M_1(2:6), M_2 (1;7), M_3 (0;4) окружности.

180. Найти малую полуось b и эксцентриситет ε эллипса, имеющего большую полуось a=5 и параметр c= 4.

181. Написать каноническое уравнение гиперболы, если c=5, a=4, фокусы лежат на оси абсцисс. Определить эксцентриситет гиперболы.

182. Составить каноническое уравнение параболы, вершина которой лежит в начале координат и которая проходит через точку F(2;-4); а OX – ось симметрии.

183. Найти центры и радиусы окружностей:

а) $x^2+y^2-6x+4y-23=0$; б) $x^2+y^2+5x=0$.Построить эти окружности.

184. Построить параболы, найти их фокусы и директрисы:

а) $y^2 = -4x$; б) $x^2= 4y$; в)$y = x^2 + 2x + 3$; г)$y = -x^2 + 2x-2$.

185. Определить тип кривых второго порядка, привести их к каноническому виду и построить:

а) $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$; б) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y =3$;

в) $x^2 - 10x = 4y - 13$; г) $4x - y^2 + 8y = 0$.

186. Уравнение кривых с помощью параллельного переноса осей координат привести к каноническому виду. Построить старые и новые оси координат, а также саму кривую. Найти точки пересечения кривых со старыми осями координат:

а) $y = \dfrac{x+3}{x-1}$; б) $y = \dfrac{3x+2}{x-2}$.

187. Зависимость объема производства z от затрат двух видов ресурсов описывается моделью: $z = 20x + 8y - 2x^2 - 4y^2$. Изобразите графически зависимость между затратами ресурсов x и y при объеме производства, равном 50 единиц.

188. Найти точки пересечений линий $x^2 + y^2 + 5x = 0$ и $x + y = 0$. Построить эти линии.

189. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину параболы $y = -2x^2 + 5x - 2$ и левый фокус гиперболы $3x^2 - 4y^2 =12$.

190. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы в вершинах эллипса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

191. Дана точка A (-4;6). Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок OA.

192. Написать уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку A (1; 2).

193. Написать уравнение окружности, проходящей через точки A (-1;3), B (0;2) и C (1;-1).

Указание. Написать уравнение искомой окружности в виде $x^2 + y^2 + m + ny + p = 0$, подставить в него координаты каждой точки и затем найти m, n, p.

194. Определить эксцентриситет эллипса, если его большая ось втрое больше малой.

195. Эллипс проходит через точки $M_1(2; \sqrt{3})$ и $M_2(0;2)$. Составить уравнение эллипса и найти расстояние от точки M_1 до фокусов.

196. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр симметрии его находится в точке (5;0). Составить уравнение эллипса, если его эксцентриситет равен 0,6 .

197. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $3x \pm 4y = 0$, а фокусы лежат на оси *ОУ* и расстояние между ними равно 20. Написать каноническое уравнение гиперболы и начертить ее.

198. Составьте каноническое уравнение гиперболы, зная, что расстояние между фокусами равно 16, а эксцентриситет $4/3$.

199. Написать каноническое уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если она проходит через точку $M_1(\sqrt{3};\sqrt{2})$, а эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

200. Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, если она проходит через точки $M_1(2\sqrt{7};-3)$ $M_2(-7;-6\sqrt{2})$.

201. Написать уравнение параболы: 1) проходящей через точки (0;0) и (-1;2) и симметричной относительно оси *OX*;

2) проходящей через точки (0;0) и (2;4) и симметричной относительно оси *ОУ*.

202. Составить каноническое уравнение параболы, если ее фокус находится в точке пересечения прямой $4x - 3y - 4 = 0$ с осью *ОХ*.

203. Составить уравнение параболы с осью симметрии, параллельной оси *ОУ*, если она проходит через точки (-2;8), (0;2), $(3;\frac{1}{2})$.

204. Назвать и построить кривые, отметить фокусы:

а) $9(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 0$; б) $4(x - \frac{1}{2})^2 - 3y^2 = 12$;

в) $(x - 4)^2 = 5(y - 2)$; г) $(x - 2) \cdot (y + 6) = 6$.

205. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду с помощью параллельного переноса начала координат. Построить старые и новые оси координат и саму кривую. Найти точки пересечения кривых со старыми осями координат:

1) $\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{2x}{3} - 4y + 4 = 0$; 2) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

3) $3x^2 + 4y^2 - 18x - 8y - 5 = 0$; 4) $5x^2 - 4y^2 + 16y - 36 = 0$;

5) $4x^2 - 9y^2 - 40x - 36y + 28 = 0$; 6) $x^2 - 4y^2 + 8x - 24y = 24$;

7) $x^2 + 6x + 5 = 2y$; 8) $2y = 3 + 2x - x^2$;

9) $2x^2 + 4x - y - 1 = 0$; 10) $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$;

11) $y^2 - 8y = 4x$; 12) $9y^2 = -36x - 6y - 13$;

13) $y = \frac{2x+1}{x+2}$; 14) $y = \frac{4x-3}{x+2}$; 15) $y = \frac{1+3x}{2x+1}$.

206. Построить кривые порядка:

1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$;

3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$; 4) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$;

5) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; 6) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$;

7) $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$; 8) $25x^2 + 16y^2 + 25x + 32y = 377{,}75$;

9) $81x^2 + 36y^2 - 162x - 24y + 76 = 0$; 10) $16x^2 - 9y^2 - 64x + 54y - 161 = 0$;

11) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$; 12) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y - 89 = 0$;

207. Определить траекторию точки $M(x;y)$, движущейся так, что сумма квадратов расстояний от нее до точек $A\ (-a;0)$, $B(0;a)$ и $C\ (a;0)$ остается равной $3a^2$.

208. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси *ОУ* и от точки F(4;0).

209. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точки F(0;2) и от прямой $y = 4$. Найти точки пересечения этой кривой с осями координат и построить ее.

210. Определить траекторию точки $M(x;y)$, которая при своем движении остается втрое ближе к точке $A(1;0)$, чем к прямой $x = 9$.

211. Определить геометрическое место точек $M(x;y)$, расстояния от которых до точки $F(0;8)$ вдвое больше, чем до прямой $y = 2$.

212. Даны окружность $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ и точка C(5;4). Составить уравнение окружности, имеющей центр в данной точке и касающейся данной окружности внешним образом.

213. Написать уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно расстоянию между концами большой и малой осей. Определить эксцентриситет.

214. Написать уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{4^2}{9} = 1$.

215. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ и симметрична относительно оси *ОУ*.

216. Составить уравнение прямой, проходящей через вершину параболы $y = -3x^2 + 12x - 9$ параллельно прямой $\frac{x}{10} + \frac{y}{8} = 1$.

217. Написать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, отсеченный осями координат.

218. Найти площадь равностороннего треугольника, вписанного в гиперболу $x^2 - y^2 = \sqrt{3}$.

219. Найти длину и уравнение перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы $y = -\frac{x^2}{8}$ на прямую, отсекающую на осях координат отрезки $a = b = 2$.

220. Составить уравнение множества точек, отношение расстояний от которых до данной точки B (3;2) и данной прямой y = – x +2 равно $\sqrt{2}$. Сделать чертеж.

221. Найти длину хорды, соединяющей точки пересечения двух парабол, имеющих общую вершину в начале координат и фокусы в точках (1;0) и (0;1).

222. Найти расстояние от начала координат до прямой, проходящей через центр гиперболы $y = \frac{x+1}{x-1}$, и вершину параболы $y = -2x^2 + 5x - 2$.

223. Составить уравнение окружности, касающейся двух параллельных прямых $2x + y - 5 = 0$ и $2x + y + 15 = 0$, причем одной из них в точке A(2;1).

224. Вычислить площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ и прямой $4x - 3y - 8 = 0$.

225. Найти площадь четырехугольника с вершинами в точках пересечения параболы $y = 4 - x^2$ с осью OX и с прямой $y = 3x$.

226. На эллипсе $x^2 + 2y^2 = 6$ взята точка M с ординатой 1 и отрицательной абсциссой. Найти угол касательной к эллипсу в точке M с прямой OM.

227. Найти сторону квадрата, выписанного в гиперболу $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{20} = 1$.

228. Вычислить длину хорды, образуемой пересечением прямой $y=4x$ с параболой $y = 3 + 2x - x^2$.

229. Вершина квадрата является центром окружности $(x + 4)^2 + (y-5)^2=1$, а его диагональ лежит на прямой $7x - y + 8 = 0$. Составить уравнения сторон и второй диагонали этого квадрата.

230. Найти проекцию точки P(-8;12) на прямую, проходящую чрез точку A (2;-3) и центр гиперболы $y = \dfrac{9+x}{x+5}$.

231. Через точку пересечения прямых $3x - y = 0$ и $x + 4y - 2 = 0$ провести прямую, перпендикулярную асимптоте гиперболы $\dfrac{-x^2}{49} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ (лежащей во II и IV координатных четвертях).

232. Составить уравнения прямых, параллельных асимптоте гиперболы $\dfrac{x^2}{9} - y^2 = 1$ (проходящей через I и III координатные четверти) и отсекающих от двух пересекающихся прямых $3x - 2y - 1 = 0$, $4x - 5y + 1 = 0$ треугольник площадью 3,5 кв.ед.

233. Издержки производства *x* единиц продукции определяются функцией $C(x) = 0{,}1x^2 + 2x + 80$. Цена одной единицы равна 8. Найти точку безубыточности.

Указание. Точкой безубыточности называется точка, в которой прибыль обращается в нуль, т.е. где выручка равняется издержкам.

234. Законы спроса и предложения на некоторый товар соответственно имеют вид: $x+2p=8$; $x \bullet p=\dfrac{7}{2}$. Найти точки рыночного равновесия и исследовать их устойчивость.

Указание. 1. Точкой рыночного равновесия $(x_0;p_0)$ называется точка пересечения кривых спроса и предложения.

2. Точка рыночного равновесия называется устойчивой, если при малых отклонениях от равновесного значения цена стремится к этому равновесному значению.

Т е с т 4

1. Множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, если величина постоянная большая, чем расстояние между фокусами называется:

а) эллипсом; б) гиперболой;

в) параболой; г) прямой.

2. Центр и радиус окружности $x^2 + (y-2)^2 = 25$:

а) $O'(0;-2)$; R=5; б) $O'(0;2)$; R=5;

в) $O'(0;-2)$; R=25; г) $O'(1;2)$; R=5.

3. Фокусы гиперболы $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ находятся в точках:

а) $F_{1,2}(\pm\sqrt{a^2+b^2};0)$; б) $F_{1,2}(\pm\sqrt{a^2-b^2};0)$;

в) $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{a^2+b^2})$; г) $F_{1,2}(0;\pm\sqrt{a^2-b^2})$.

4. Указать параболы, симметричные оси OX:

1. $y=4x^2$; 2. $y^2=x-2$; 3. $y=x^2-2$; 4. $y^2=4x$.

а) 1, 2; б) 2, 4; в) 1, 2, 4; г) 1.

5.Траектория движения точки М (х;у), которая при своем движении остаётся вдвое ближе чем к точке В(-4;4), есть:

а) окружность; б)гипербола; в)парабола; г) эллипс.

6. Центр эллипса $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ находится в точке:

а)(3;-1);

б) (-3;-1);

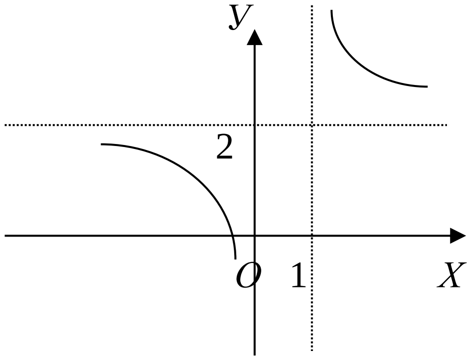
в) (-1;3);

г) (-1;-3) .

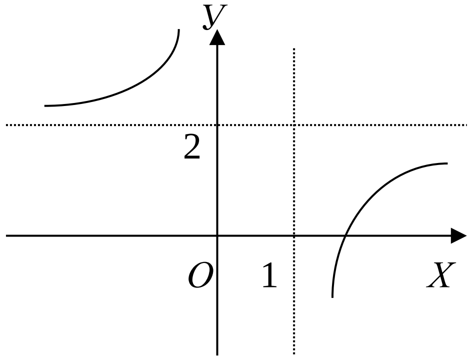
7. Установить соответствие между рисунками и уравнениями кривых:

1) $(x-1)^2 = 2(y-2)$; 2) $y - 2 = \frac{3}{x-1}$;

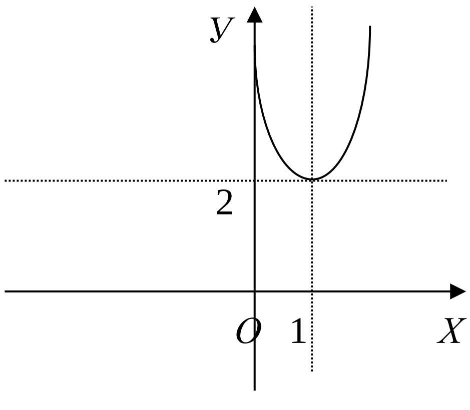
3) $y-2=\frac{-3}{x-1}$; 4) $(y-2)^2 = 2(x-1)$.



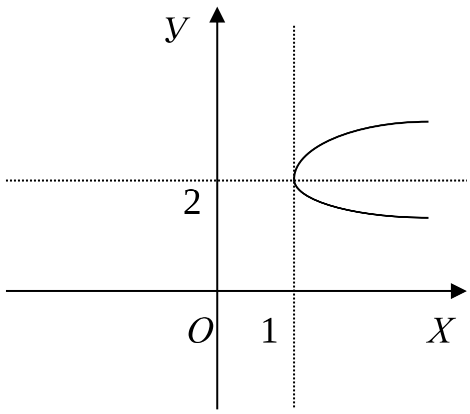
а)



б)



б)



г)

8. Установить соответствие между эксцентриситетами указанных кривых и формулами:

1. для эллипса с фокусами на оси *OX*	а) $\varepsilon = 1$;
2. для эллипса с фокусами на оси *OУ*	б) $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;
3. для гиперболы с фокусами на *OX*	в) $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$;
4. для гиперболы с фокусами на *OУ*	г) $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$;
5. для параболы	д) $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$.

9. Найти значение выражения $\dfrac{x_0 + y_0}{k}$, где $(x_0; y_0)$ – координаты центра, а k – радиус окружности $x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 0$.

10. Найти разность $(d_2 - d_1)$, где d_1 – расстояние между фокусами эллипса $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{24} = 1$, d_2 – расстояние между фокусами гиперболы $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

11. Найти расстояние между центром равносторонней гиперболы

$y = \dfrac{12x-5}{4x-8}$ и вершиной параболы $y = -2x^2 + 20x + 43$.

12. Мнимые вершины гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ находятся в точке: а) $(\pm b;0)$,

б) $(0;\pm b)$, в) $(\pm a;0)$, г) $(0;\pm a)$.

13. Уравнение директрисы для параболы $y^2 = 2px$ ($p>0$) имеет вид: а) $y = -\dfrac{p}{2}$,

б) $y = \dfrac{p}{2}$, в) $x = \dfrac{p}{2}$, г) $x = -\dfrac{p}{2}$.

14. Сумма ($x_0 + y_0$), где ($x_0;y_0$)- координаты вершины параболы
$(x+5)^2 = 4(y-1)$ равна: а)-6, б)4, в)-4, г)6.

15. Кривая второго порядка в общем виде задается уравнением:
а) $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$; б) $Ax^2+By^2+Cx+Dy+F=0$;
в) $Ax^2+By^2+C=0$; г) $x^2+2xy+y^2=0$.

Вопросы для самопроверки

1. Общее понятие о кривых второго порядка.

2. Эллипс: определение, каноническое уравнение, основные характеристики (фокусы, эксцентриситет). Построение эллипса.

3.Окружность как частный случай эллипса. Построение окружности.

4.Гипербола: определение, каноническое уравнение, основные характеристики (фокусы, эксцентриситет, асимптоты). Построение гиперболы.

5.Частные случаи гиперболы: равнобочная (равносторонняя) гипербола, дробно-линейная функция.

6.Парабола: определение, канонические уравнения (если оси симметрии *OX* и *OУ*); основные характеристики (фокус, эксцентриситет, директриса). Построение.

7.Уравнения кривых второго порядка со смещёнными центром (в точке O' ($x_0;y_0$)).

8. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду с помощью параллельного переноса.

9. Построение кривых второго порядка со смещёнными центром.

5. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. Необходимый теоретический минимум

***Определение* 5.1. Поверхностью** называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$F\,(x;\,y;\,z)=0 \quad \text{или} \quad z = f\,(x;y)\,. \tag{5.1}$$

Пример поверхности. Сферическая поверхность (или сфера) с центром в точке $O'(x_0;\, y_0;\, z_0)$ радиусом R задаётся уравнением:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{5.2}$$

$\boxed{?}$ Сравните уравнение (5.2) с уравнением окружности с центром в точке $O'(x_0;\, y_0)$ радиусом R.

$\boxed{??}$ Запишите уравнение сферы с центром в начале координат.

- Если уравнение поверхности (5.1) переменные *x, y, z* содержит только в первой степени и не содержит их произведений, то такая поверхность называется *плоскостью.*

Положение плоскости в пространстве относительно выбранной прямоугольной системы координат вполне определяется какой-либо точкой $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ этой плоскости и ненулевым вектором $\bar{n}=(A;B;C)$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$, перпендикулярным плоскости (рис.5.1). Вектор $\bar{n}$ называется **нормальным вектором** плоскости.

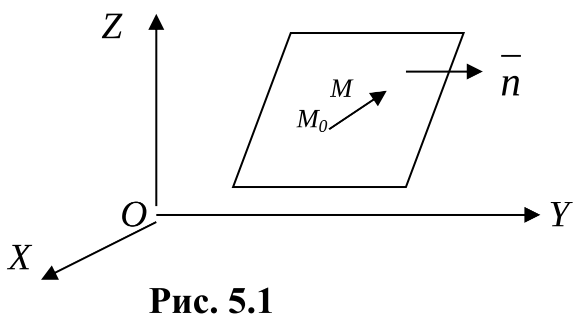


Рис. 5.1

Основные виды уравнения плоскости:

1. Уравнение плоскости, заданной точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и нормальным вектором $\overline{n}=(A;B;C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad \mathbf{(5.3)}$$

2. Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad \mathbf{(5.3)}$$

где a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью соответственно на осях OX, $OУ$, OZ (рис. 5.2).

3. Общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$. **(5.4)**

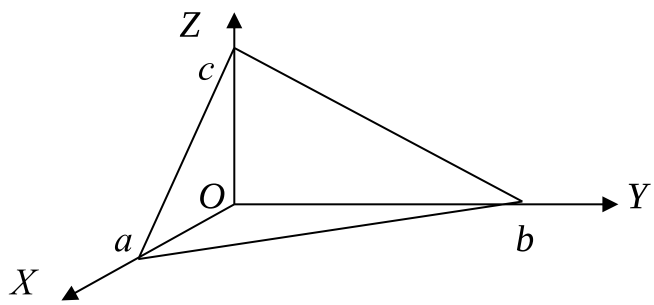


Рис. 5.2

Частные случаи общего уравнения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$:

1. $D=0 \Rightarrow Ax+By+Cz=0$ – проходит через начало координат.
2. а) $A=0 \Rightarrow By+Cz+D=0$ – плоскость параллельна оси OX,
   б) $B=0 \Rightarrow Ax+Cz+D=0$ – плоскость параллельна оси $OУ$;
   в) $C=0 \Rightarrow Ax+By+D=0$ – плоскость параллельна оси OZ.

3. а) $A=D=0 \Rightarrow By+Cz=0$ – плоскость проходит через ось OX,
   б) $B=D=0 \Rightarrow Ax+Cz=0$ – плоскость проходит через ось $OУ$,
   в) $C=D=0 \Rightarrow Ax+By=0$ – плоскость проходит через ось OZ.

4. а) $B=C=0 \Rightarrow Ax+D=0 \Rightarrow x=-\dfrac{D}{A}$ – плоскость параллельна координатной плоскости $УOZ$,
   б) $A=C=0 \Rightarrow By+D=0 \Rightarrow y=-\dfrac{D}{B}$ –плоскость параллельна плоскости XOZ,
   в) $A=B=0 \Rightarrow Cz+D=0 \Rightarrow z=-\dfrac{D}{C}$ – плоскость параллельна плоскости $XOУ$.

5. а) $B=C=D=0 \Rightarrow Ax=0 \Rightarrow x=0$ – уравнение плоскости $УOZ$,
   б) $A=C=D=0 \Rightarrow By=0 \Rightarrow y=0$ – уравнение плоскости XOZ,
   в) $A=B=D=0 \Rightarrow Cz=0 \Rightarrow z=0$ – уравнение плоскости $XOУ$.

Положение прямой в пространстве определяется однозначно, если на ней заданы точка $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0\ )$, принадлежащая прямой, и ненулевой вектор $\bar{s}\ = (m;n;p)$ $(m^2+n^2+p^2\neq 0)$, параллельный этой прямой (рис.5.3). Вектор $\bar{S}$ называется **направляющие вектором** прямой.

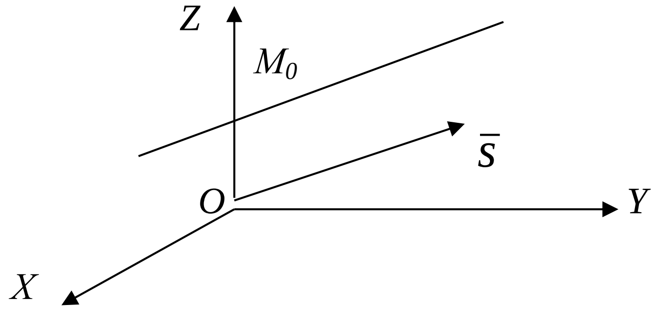


Рис. 5.3

Виды уравнения прямой в пространстве:

1.общие уравнения прямой (в виде пересечения двух плоскостей):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(5.5)}$$

2. уравнения прямой, проходящей через точку $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0\ )$ с направляющим вектором $\bar{s}\ =(m;n;p)$:

а) канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$; **(5.6)**

б) параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt; \\ y = y_0 + nt; \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad \textbf{(5.7)}$$

3.Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки: $M_1(x_1;\ y_1\ ;z_1)$ *и* $M_2(x_2;\ y_2\ ;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad \textbf{(5.8)}$$

Определение 5.1. При пересечении плоскости образуют четыре попарно равных двугранных угла. **Углом между двумя плоскостями** называется любой из этих двух смежных двугранных углов.

- Один из углов между плоскостями равен *углу между* их *нормальными векторами* $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$.

• Если плоскости *параллельны (перпендикулярны),* то их *нормальные векторы параллельны (перпендикулярны),* т.е. $\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$ ($\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$).

Таблица 5.1 - Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

	Угол	Условие	
		параллельности	перпендикулярности
Две плоскости с нормальными векторами $\bar{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$; $\bar{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$	$cos\varphi=\dfrac{\pm\ (A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
Две прямые с направляющими векторами $\bar{s}_1=(m_1;n_1;p_1)$, $\bar{s}_2=(m_2;n_2;p_2)$.	$cos\varphi=\dfrac{\pm\ (m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$	$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$	$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
Прямая (направляющий век-тор $\bar{s}=(m;n;p)$) и *плоскость* (нормальный век- тор $\bar{n}=(A;B;C)$)	$\sin\varphi=\dfrac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$	$Am+Bn+Cp=0$	$\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

Определение 5.2. **Углом между двумя прямыми** в пространстве называется любой из двух углов, образованных прямыми, проведенными через произвольную точку пространства параллельно данным прямым.

• Угол между прямыми в пространстве можно рассматривать как угол между их направляющими векторами $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$. Соответственно *параллельность (перпендикулярность) прямых* в пространстве означает, что *направляющие векторы прямых параллельны (перпендикулярны),* т.е. $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2$ ($\bar{s}_1 \perp \bar{s}_2$).

Определение 5.3. **Углом между прямой и плоскостью** называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.

- Если прямая с направляющим вектором $\bar{s}$ параллельна (перпендикулярна) плоскости с нормальным вектором $\bar{n}$, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{s}$ будут взаимно *перпендикулярны (взаимно параллельны).*

- Если условия параллельности прямой и плоскости не выполняются, то прямая (5.6) и плоскость (5.4) пересекаются. Чтобы найти их точку пересечения, надо решить систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}; \\ Ax + By + CZ + D = 0. \end{cases}$$

- Расстояние d от точки A $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости (5.4) находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad \textbf{(5.9)}$$

? Сравните с формулой расстояния от точки до прямой на плоскости (3.1).

5.2. Примеры решения типовых задач

Задача 5.1. Построить плоскости, заданные уравнениями:

1) 4x + 5y + 16z – 8 = 0; 2) 4x + 5y – 20 = 0; 3) 2z – 8 = 0;

4) x – 3y + 6z = 0; 5) 6y – z = 0.

Решение.

1) Из уравнения видно, что плоскость не проходит через начало координат (D= –8≠0) и пересекает в различных точках все три оси координат. Поэтому приведем общее уравнение плоскости к уравнению плоскости в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \Rightarrow$

4x + 5y + 16z – 8 = 0 $\Rightarrow$ 4x + 5y + 16z = 8 $\Rightarrow$ $\dfrac{4x}{8} + \dfrac{5y}{8} + \dfrac{16z}{8} = \dfrac{8}{8}$ $\Rightarrow$

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{8/5} + \dfrac{z}{1/2} = 1$, т.е. a=2; b=$\dfrac{8}{5} = 1{,}6$; $c = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

Таким образом, искомая плоскость проходит через точки A(2;0;0), B(0; 1,6; 0), C(0; 0; 0,5) (рис. 5.4)

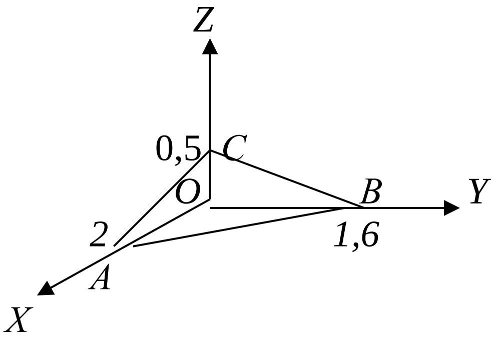


Рис. 5.4

- На рис. 5. 4 прямые AB, AC, BC – линии пересечения (*следы*) заданной плоскости с координатными плоскостями.

! Заданную плоскость провели через три точки, т.к. из школьного курса геометрии известно, что через три точки всегда можно провести плоскость, и притом одну.

2) Так как уравнение плоскости $4x + 5y - 20 = 0$ не содержит члена с координатой z (C=0), то плоскость параллельна оси *OZ* значит, искомая плоскость отсекает на осях *OX* и *OУ* отрезки *a* и *b* конечной величины, а на оси *OZ* – отрезок с бесконечно большой величины. Найдем отрезки *a* и *b*:

$4x + 5y - 20 = 0 \Rightarrow 4x + 5y = 20 \Rightarrow \frac{4x}{20} + \frac{5y}{20} = \frac{20}{20} \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow a = 5$, $b = 4$. Итак, заданная плоскость проходит через точки A (5;0;0), B (0;4;0) параллельно оси *OZ* (рис.5.5).

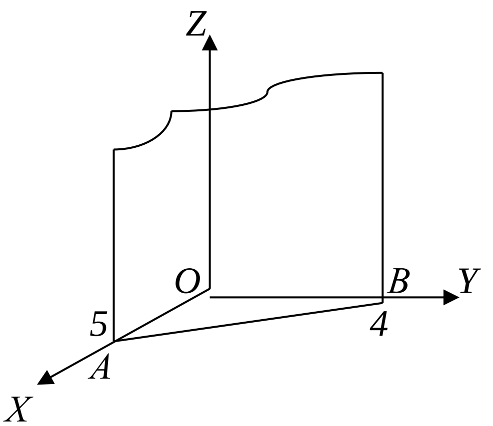


Рис. 5.5

- На рис. 5.5. прямая АВ – *след* заданной плоскости в плоскости *XOУ*, а следы в координатных плоскостях *XOZ* и *УOZ* параллельны оси *OZ*.

3) В уравнении $2z - 8 = 0$ A=B=0, т.е. данная плоскость параллельна плоскости *XOУ*. Найдем величину отрезка *с*, которую плоскость отсекает на оси OZ: $2z = 8 \Rightarrow z = 4 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow$ плоскость проходит через точку С (0;0;4) и параллельна осям *OX* и *OУ*. Таким образом, *следы* искомой плоскости в координатных плоскостях параллельны соответственно осям *OX* и *OУ* (рис. 5.6).

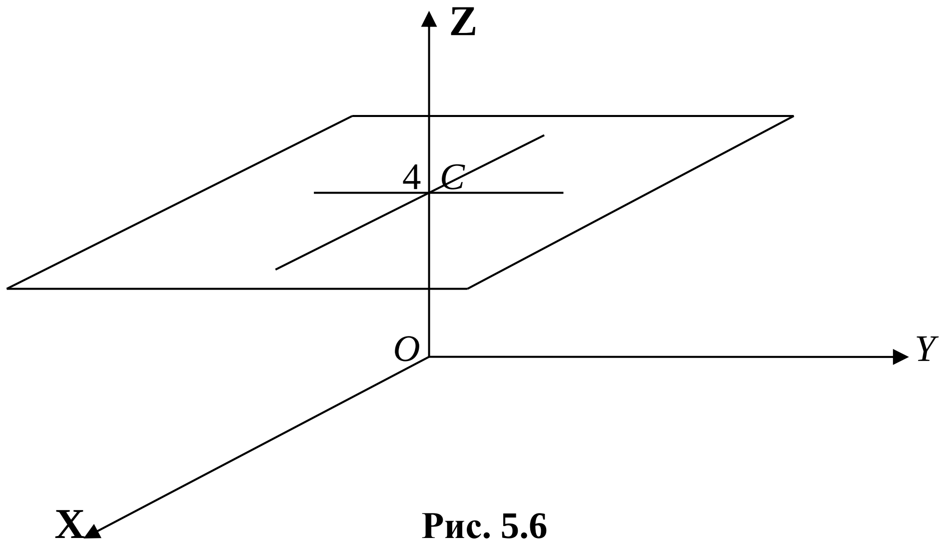


Рис. 5.6

4) Плоскость $x - 3y + 6z = 0$ проходит через начало координат, а потому она не отсекает отрезков на осях координат. Поэтому найдем следы искомой плоскости на координатных плоскостях:

а) *след на плоскости УOZ* (x=0): $-3y + 6z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}y$. Построим данную прямую в плоскости *ZOУ*. Для этого определим координаты какой- либо точки. Возьмем, например, y=2, тогда z=1, т.е. прямая проходит через точку А (0;2;1). Итак, прямая ОА – след искомой плоскости в плоскости *УOZ*.

б) *след на плоскости XOZ* (y = 0): $x + 6z = 0 \Rightarrow x = -6z$. Пусть $z = -1 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow$ прямая проходит через точку В (6;0;-1). Значит, след данной плоскости в плоскости *XOZ* есть прямая OB.

в) *след на плоскости ХОУ* (z=0): $x - 3y = 0 \Rightarrow x = 3y$. Пусть $y=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$ прямая проходит через точку С (3;1;0). Итак, прямая СО- след плоскости в плоскости *ХОУ*. (Заметим, что следы ОА и ОС – видимые, а след ОВ невидимый, так как его закрывает плоскость *ХОУ* (рис.5.7)).

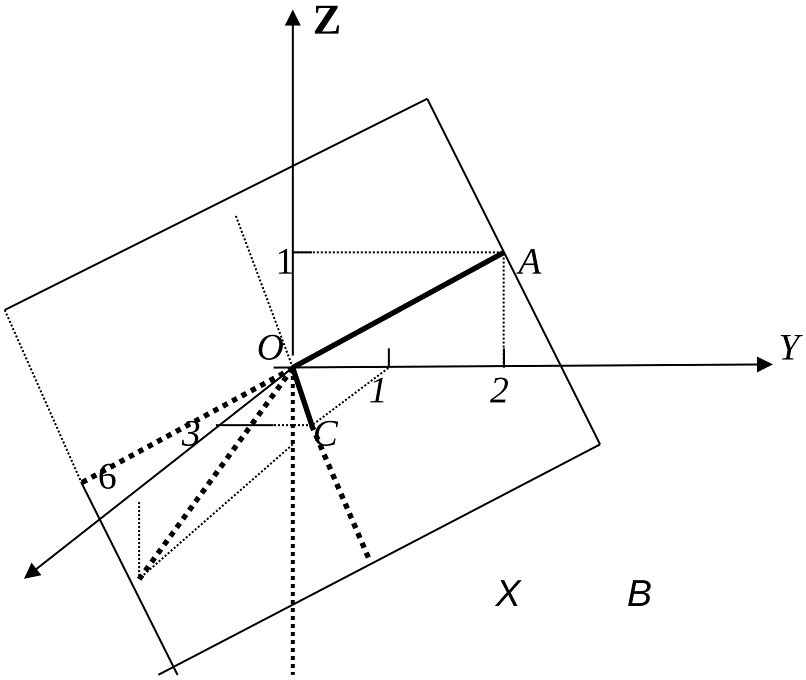


Рис. 5.7

! Плоскость на рис. 5.7 провели через две пересекающиеся прямые ОА и ОС, т.к. известно, что через две пересекающиеся прямые всегда можно провести плоскость (см. школьный курс геометрии), и притом только одну.

5) В уравнении $6y - z = 0$ A=D=0, следовательно, плоскость проходит через ось *OX*. *Следом* данной плоскости в плоскости *УOZ* является прямая $z = 6y$. Чтобы построить данную прямую, найдем координаты ее любой точки. Пусть, например, $y=1$, тогда $z=6$ и прямая $z = 6y$ проходит через начало координат и точку А(0;1;6). ? Почему здесь координата x=0?

Итак, ОА - след искомой плоскости в плоскости *УOZ*. Следы в плоскостях *XOУ* и *XOZ* совпадают с осью *OX* (рис.5.8).

Задача 5.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М (-3;4;2) перпендикулярно вектору $\overline{n} = (4;2;-1)$.

Решение. По условию вектор $\overline{n}$ перпендикулярен искомой плоскости, значит, он является ее нормальным вектором. Поэтому используем уравнение (5.2): $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

В нашем случае $\bar{n} = (A; B; C) = (4; 2; -1)$, то есть $A = 4$, $B=2$, $C= -1$;

$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) = M(-3; 4; 2)$, то есть $x_0= -3$, $y_0 = 4$, $z_0 = 2$. В результате получим: $4(x + 3) + 2(y - 4) - 1(z - 2) = 0 \Rightarrow 4x + 12 + 2y - 8 - z + 2 = 0 \Rightarrow$ $4x + 2y - z + 6 = 0$ – уравнение искомой плоскости.

Ответ. $4x + 2y - z + 6 = 0$.

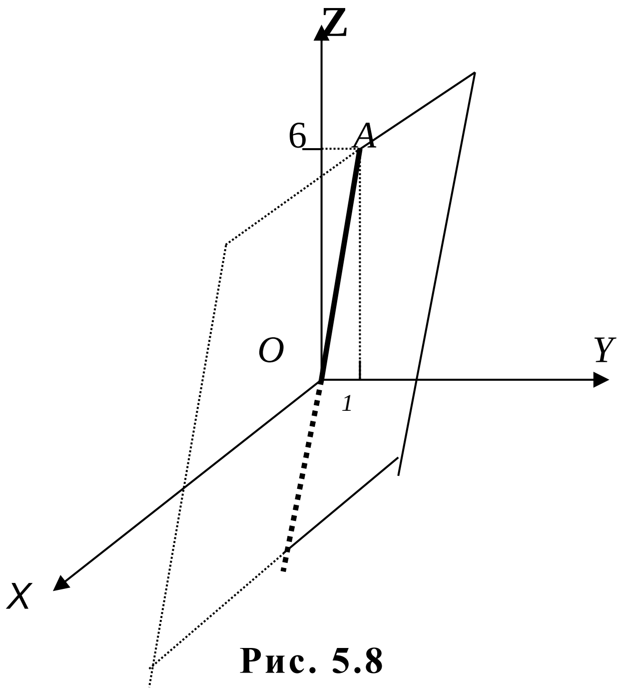


Рис. 5.8

Задача 5.3. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось *ОУ* и точку М (6;0;4).

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через ось *ОУ* имеет вид: $Ax + Cz =0$ ($A\neq 0$, $C\neq 0$) (*) . Подставим в данное уравнение координаты точки М, то есть $x = 6$, $z = 4$. В результате чего получим: $A\cdot 6 + 4\cdot C = 0$. Выразим из данного выражения, например, А: $6A = -4C \Rightarrow A=-\frac{4}{6}C \Rightarrow A=-\frac{2}{3}C$.

Подставим в выражение (*): $-\frac{2}{3}C\cdot x+C\cdot z=0$. Разделим обе части полученного уравнения на С: $-\frac{2}{3}x + z = 0 \Rightarrow$?? $2x-3z=0$ – уравнение искомой плоскости. **Ответ.** $2x -3z =0$.

Задача 5.4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M (2;3;-1) параллельно плоскости 5x – 3y + 2z – 10 = 0.

Решение.

Используя уравнение (5.2), получим: A(x – 2) + B(y–3)+C (z+1)=0. Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором $\overline{n}$ =(5;-3;2) данной плоскости. Значит, A=5, B= –3, C=2. Тогда получаем следующее уравнение: 5(x–2) – 3(y–3) + 2(z+1) = 0. После преобразований получаем искомую плоскость: 5x–3y+2z+1= 0.

Ответ. 5x – 3y + 2z + 1 = 0.

Задача 5.5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M (1;2;3) и перпендикулярной к плоскостям:

x – y + z – 7 = 0 (α_1); 3x + 2y – 12z + 5 = 0 (α_2).

Решение.

1) Используя уравнение (5.2) плоскости, получим:

A(x – 1) + B(y – 2) + C(z – 3) = 0 (*) . Найдем величины A,B,C, применяя *условие перпендикулярности* двух плоскостей (табл.5.1):

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

2) Из заданных по условию плоскостей следует, что нормальный вектор плоскости $\alpha_1 : \overline{n}_1$ =(1; – 1; 1), а нормальный вектор плоскости $\alpha_2 : \overline{n}_2$ =(3; 2;–12). Обозначим нормальный вектор искомой плоскости $\alpha : \overline{n}$ =(A,B,C).

3) а)Так как $\alpha \perp \alpha_1$, то условие перпендикулярности плоскостей примет вид: A–B+C=0. (Здесь A_1=A, B_1=B, C_1=C, A_2=1, B_2=1, C_2=1);

б) так как $\alpha \perp \alpha_2$, то условие перпендикулярности:3A+2B-12C=0 (Здесь A_1=A, B_1=B, C_1=C, A_2=3, B_2=2, C_2= –12).

4) Получим систему уравнений:
$$\begin{cases} A - B + C = 0; \\ 3A + 2B - 12C = 0. \end{cases}$$

Делим первое и второе уравнение на *С:* $\begin{cases} \dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}+1=0; \\ \dfrac{3A}{C}+\dfrac{2B}{C}-12=0. \end{cases}$

Решим данную систему уравнений $\boxed{??}$, и в результате получим: $\dfrac{A}{C}=2, \dfrac{B}{C}=3,$ откуда А=2С, В=3С.

5) Подставим найденные значения А и В в уравнение (*):

2С(x – 1) + 3С(y – 2) + C(z – 3) = 0.

Разделим обе части последнего выражения на С (С $\neq$ 0) :

2(x – 1) + 3(y – 2) + (z – 3) = 0. После преобразований $\boxed{??}$ получим: 2x + 3y + z – 11 = 0 – уравнение искомой плоскости.

Ответ. 2x + 3y + z – 11 = 0.

Задача 5.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через:

1) точку М (-1;4;5) параллельно двум данным векторам: $\bar{a}$ =(6; – 8; 8) и $\bar{b}$ = (-4;3;2);

2) точки M_1(–1; 4;5) и M_2(3; 2;–2) параллельно вектору $\bar{a}$ =(6;-8;8);

2) точки M_1(– 1; 4; 5), M_2 (3; 2; –2) и M_3(5; 0; 5).

Решение.

1) Уравнение плоскости α, проходящей через точку М (-1;4;5) имеет вид: A(x + 1) + B(y – 4) + C(z – 5) = 0 (*), где А, В, С – координаты нормального вектора $\bar{n}$ плоскости α.

Так как $\alpha \parallel \bar{a}$ и $\alpha \parallel \bar{b}$, то нормальный вектор плоскости α $\bar{n}$ =(A,B,C) перпендикулярен каждому из данных векторов, т.е. $\bar{n} \perp \bar{a}$ и $\bar{n} \perp \bar{b}$.

По *условию перпендикулярности* векторов получим:

$$\begin{cases} 6A-8B+8C=0; \\ -4A+3B+2C=0. \end{cases}$$

Делим оба уравнения системы на C : $\begin{cases} \dfrac{6A}{C} - \dfrac{8B}{C} + 8 = 0; \\ -\dfrac{4A}{C} + \dfrac{3B}{C} + 2 = 0. \end{cases}$

Решим данную систему относительно $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$. В результате получим: $\dfrac{A}{C} = \dfrac{20}{7}$; $\dfrac{B}{C} = \dfrac{22}{7}$, т.е. $A = \dfrac{20}{7}C$, $B = \dfrac{22}{7}C$. Подставим в уравнение (*):

$\frac{20}{7}C$(x + 1) + $\frac{22}{7}C$(y – 4) + C(z – 5) = 0 .

После сокращения последнего выражения на C ($C \neq 0$) получаем:

$\frac{20}{7}$(x + 1) + $\frac{22}{7}$(y – 4) + (z – 5) = 0 $\Rightarrow$ 20(x+1)+22(y – 4) + 7(z – 5) =0 $\Rightarrow$ 20x + 22y + 7z – 103 =0 – искомое уравнение

2) В пункте 1) решения данной задачи получено уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 (– 1; 4; 5):

A(x + 1) + B(y – 4) + C(z – 5) = 0   (*).

В силу того, что плоскость параллельна вектору $\bar{a}$ =(6; –8; 8), получаем равенство: 6A – 8B + 8C = 0   (**).

Так как плоскость проходит через точку M_2(3; 2; –2), то ее координаты удовлетворяют уравнению (*): A(3+1)+B(2 – 4)+C(-2–5)=0$\Rightarrow$

4A – 2B – 7C = 0   (***). Решим совместно систему (**), (***):

$$\begin{cases} 6A - 8B + 8C = 0, \\ 4A - 2B - 7C = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6A}{C} - \dfrac{8B}{C} = -8; \\ \dfrac{4A}{C} + \dfrac{2B}{C} = 7. \end{cases}$$

Решим данную систему по формулам Крамера. Для чего составим и вычислим следующие определители: $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ = – 12 + 32 = 20;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -8 & -8 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ = 16 + 56 = 72; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & -8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$ = 28 + 32 = 60.

Тогда получаем: $\dfrac{A}{C} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{72}{20} = \dfrac{18}{5}$; $\dfrac{B}{C} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{60}{20} = 3$,

т.е. $A=\dfrac{18}{5}\cdot C$, $B=3C$. Подставим найденные выражения A и B в (*): $\dfrac{18}{5}\cdot C\cdot(x + 1) + 3C\cdot(y - 4) + C\cdot (z - 5) =0$. Сократим на C ($C \neq 0$):

$\dfrac{18}{5}(x + 1) + 3(y - 4) + (z - 5) = 0$. После преобразований получаем:

$18(x + 1) + 3\cdot 5(y - 4) + 5(z - 5) = 0 \Rightarrow$ $18x + 15y + 5z - 67 = 0$ – уравнение искомой плоскости.

3) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-1;4;5)$ имеет вид: $A(x + 1) + B(y - 4) + C(z - 5) =0$ (*). Так как точки $M_2(3;2;-2)$ и $M_3(5;0;5)$ лежат на плоскости, то их координаты удовлетворяют уравнению плоскости, то есть:

$$\begin{cases} A(3+1)+B(2-4)+C(-2-5)=0, \\ A(5+1)+B(0-4)+C(5-5)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A-2B-7C=0; \\ 6A-4B=0. \end{cases}$$

Откуда получаем $\boxed{??}$ $A=14C$, $B=21C$.

Подставляя полученные величины в уравнение (*) и сокращая на $C \neq 0$ получаем: $14(x + 1) + 21(y - 4) + (z - 5) = 0$. Или после преобразований: $14x + 21y + z - 75 = 0$ – искомая плоскость.

Ответ. 1) $20x + 22y + 7z - 103 = 0$; 2) $18x + 15y + 5z - 67 =0$;
3) $14x + 21y + z - 75 = 0$.

Задача 5.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(4;2;–5)

1) параллельно вектору $\overline{S} = (1;2;3)$;
2) и точку B(0;3;2);
3) параллельно прямой $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z}{5}$;
4) параллельно оси OZ;
5) образующей с осями координат углы $\alpha = \dfrac{\pi}{3}; \beta = \dfrac{\pi}{4}; \gamma = \dfrac{\pi}{6}$,
6) параллельно прямой $\begin{cases} x+y-3z+3=0; \\ x-y+2z-4=0. \end{cases}$

Решение.

1) По условию вектор $\bar{s}$ параллелен искомой прямой, поэтому он является ее *направляющим вектором*. Применим уравнение (5.6): $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

В нашем случае $x_0 = 4$, $y_0 = 2$, $z_0 = -5$ (так как прямая проходит через точку А (4;2;-5)), *m*=1, *n*=2, *p*=3 (так как $\bar{s}$=(1;2;3)). Тогда канонические уравнения искомой прямой: $\underline{\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+5}{3}}$.

2) По формуле (5.8) имеем: $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}=\dfrac{z-z_A}{z_B=z_A}$,

т.е. $\dfrac{x-4}{0-4}=\dfrac{y-2}{3-2}=\dfrac{z+5}{2+5}$ $\Rightarrow$ $\underline{\dfrac{x-4}{-4}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+5}{7}}$ - уравнение искомой прямой.

3) В качестве направляющего вектора искомой прямой берем направляющий вектор данной прямой, т.е. $\bar{s}$ = (3;4;5). Поэтому по формуле (5.6) канонические уравнения прямой: $\underline{\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z+5}{5}}$.

4) В качестве направляющего вектора прямой берем единичный вектор, направленный по оси *OZ*, т.е. $\bar{s}$ = (0;0;1). Тогда канонические уравнения искомой прямой: $\underline{\dfrac{x-4}{0}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+5}{1}}$.

Равенство знаменателей нулю в уравнениях прямой означает, что соответствующие числители $x - 4 = 0$ и $y - 2 = 0$.

5) В качестве направляющего вектора прямой возьмем единичный вектор данной прямой, координатами которого являются направляющие косинусы: $\bar{s} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Используя данные из условия задачи, получаем:

$\bar{s}=(\cos\dfrac{\pi}{3};\ \cos\dfrac{\pi}{4};\ \cos\dfrac{\pi}{6})$ $\Rightarrow$ $\bar{s}=(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2})$. Тогда по формуле (5.6) канонические уравнения прямой: $\underline{\dfrac{x-4}{1/2}=\dfrac{y-2}{\sqrt{2}/2}=\dfrac{z+5}{\sqrt{3}/2}}$.

б) Приведем уравнения прямой, заданной системой, к каноническому виду. Для этого выразим одну из переменных, например x, поочередно через две другие (z и y), а затем приравняем полученные выражения.

а) Выразим x через z. Для этого сложим оба уравнения системы:

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{o}+\acute{o}-3z+3=0 \\ \tilde{o}-\acute{o}+2z-4=0 \end{array}\right| \oplus \Rightarrow \tilde{o}+\acute{o}-3z+3+\tilde{o}-\acute{o}+2z-4=0+0 \Rightarrow 2\tilde{o}-z-1=0 \Rightarrow$$

$$2\tilde{o}=z+1 \Rightarrow \tilde{o}=\frac{z+1}{2} \quad (*).$$

б) Выразим x через y:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-3z+3=0 \Rightarrow \\ x-y+2z-4=0 \Rightarrow \end{array}\right. \left\{\begin{array}{r} z=\frac{1}{3}(x+y+3); \\ x-y+2\bullet\frac{1}{3}(x+y+3)-4=0 \ (**). \end{array}\right.$$

Преобразуем выражение (**): $x-y+\frac{2}{3}(x+y+3)=4;$ умножим обе последнего части равенства на 3:

$$3x-3y+2\bullet(x+y+3)=4\bullet 3 \Rightarrow 3x-3y+2x+2y+6=12 \Rightarrow$$

$$5x-y=6 \quad \Rightarrow \quad 5x=y+6 \Rightarrow x=\frac{y+6}{5} \quad (***).$$

в) Приравняв выражения (*) и (***), получим канонические уравнения заданной прямой: $\frac{x}{1}=\frac{y+6}{5}=\frac{z+1}{2}$.

Отсюда видно, что направляющий вектор заданной прямой $\bar{s}$ = (1;5;2). Тогда, в силу параллельности заданной и искомой прямых, направляющий вектор искомой прямой также $\bar{s}$ = (1;5;2). В итоге, по формуле [?] получаем требуемые уравнения прямой:

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+5}{2}.$$

Ответ. 1) $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+5}{3}$; 2) $\frac{x-4}{-4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+5}{7}$;

3) $\frac{x-4}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+5}{5}$; 4) $\frac{x-4}{0}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+5}{1}$;

5) $\frac{x-4}{1/2}=\frac{y-2}{\sqrt{2}/2}=\frac{z+5}{\sqrt{3}/2}$; 6) $\frac{x}{1}=\frac{y+6}{5}=\frac{z+1}{2}$.

Задача 5.8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M (2;-3;4) и перпендикулярной прямым:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}; \quad \frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{3}.$$

Решение. По формуле $\boxed{?}$ получаем: $\frac{x-2}{m}=\frac{y+3}{n}=\frac{z-4}{p}$.

Из *условия перпендикулярности* искомой прямой с данными имеем: $\begin{cases} m-n+p=0, \\ 2m+n+3p=0 \end{cases}$. Из полученной системы найдем отношения направляющих коэффициентов: $\begin{cases} \frac{m}{p}-\frac{n}{p}+1=0; \\ 2\bullet\frac{m}{p}+\frac{n}{p}+3=0. \end{cases}$

Откуда $\frac{m}{p}=-\frac{4}{3},\frac{n}{p}=-\frac{1}{3}$. Значит, $m:n:p=4:1:(-3)$.

Уравнения искомой прямой: $\underline{\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-3}}$.

Ответ. $\underline{\frac{x-2}{4}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-3}}$.

Задача 5.9. Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости *XOZ*, проходящей через начало координат и перпендикулярную к прямой $\frac{x+4}{3}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+8}{1}$ (*).

Решение. Т.к. прямая проходит через О (0;0;0), то по формуле (5.6) получаем: $\frac{x-0}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-0}{p}$ (**).

Так как прямая лежит в плоскости *XOZ*, то $\bar{s}\perp OY$, т.е. $n = 0$.

Из условия перпендикулярности прямых (*) и (**) (табл. 5.1) следует, что: $3m - 2n + p = 0 \Rightarrow 3m - 2\cdot 0 + p = 0 \Rightarrow 3m + p = 0 \Rightarrow p = -3m$. Подставим в уравнения (**) $n = 0$ и $p = -3m$:

$\frac{x-0}{m}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{-3m}$. Сократим на $m\neq 0$: $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$ – искомая прямая.

Ответ. $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$.

Задача 5.10. Найти углы:

1)между плоскостями: $x-y\sqrt{2}+z-1=0,\ x+y\sqrt{2}-z+3=0;$

2)между прямыми: $\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+6}{-1};\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1};$

3)между прямой $\frac{x-0{,}5}{1}=\frac{y+0{,}5}{2}=\frac{z}{2}$ и плоскостью $16x+2y-15z+4=0$.

Решение.

1) Выпишем координаты нормальных векторов $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ к данным плоскостям:

а) к плоскости $x-y\sqrt{2}+z-1=0$ нормальный вектор $\bar{n}_1=(1;\ -\sqrt{2};\ 1)$, т.е. $A_1 = 1$, $B_1 = -\sqrt{2}$, $C_1 = 1$;

б) к плоскости $x+y\sqrt{2}-z+3=0$ нормальный вектор $\bar{n}_2=(1;\ \sqrt{2};\ -1)$, т.е. $A_2 = 1$, $B_2 = \sqrt{2}$, $C_2 = -1$.

Тогда искомый угол находится так (см. табл. 5.1):

$$\cos\varphi=\frac{\pm(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{\pm(1\cdot1+(-\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}+1\cdot(-1))}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}+\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=\pm\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos\varphi=\mp\frac{1}{2}$, т.е. двугранные углы, образованные пересечением заданных плоскостей, равны: $\varphi_1=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ $=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

2) Выпишем координаты направляющих векторов заданных прямых:

а) для прямой $\frac{x+4}{2}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+6}{-1}$ направляющий вектор $\bar{s}_1=(2;-2;-1)$, т.е. $m_1=2$, $n_1=-2$, $p_1=-1$;

б) для прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}$ направляющий вектор $\bar{s}_2=(1;2;1)$, т.е. $m_2=1$, $n_2=2$, $p_2=1$. Тогда искомый угол находится так (см. табл. 5.1):

$$\cos\varphi=\frac{\pm(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2)}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}=\frac{\pm(2\cdot1+(-2)\cdot2+(-1)\cdot1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\pm\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\Rightarrow$$

$\Rightarrow\cos\varphi=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$. Тогда заданные прямые при пересечении образуют смежные углы: $\varphi_1=\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; $\varphi_2=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

3) Направляющий вектор заданной прямой: $\bar{s}=(1;2;2)$; т.е. $m=1$; $n=2$; $p=2$. Нормальный вектор заданной плоскости: $\bar{n}=(16;12;-15)$, т.е. A = 16; B = 12; C = -15. Тогда искомый угол равен (табл. 5.1):

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{|16\cdot1+12\cdot2+(-15)\cdot2|}{\sqrt{16^2+12^2+(-15)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-10|}{25\cdot3}=$$

$$=\frac{10}{25\cdot3}=\frac{2}{14}\Rightarrow\sin\varphi=\frac{2}{15}\Rightarrow\varphi=\arcsin\frac{2}{15}.$$

Ответ. 1) $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$; 2) $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$ и $\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; 3) $\arcsin\frac{2}{15}$.

Задача 5.11. Найти центр и радиус сферы: $x^2 + y^2 + z^2 - 10y + 4z + 25 = 0$.

Решение. Приведем заданное уравнение сферы к виду:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Для этого применим *метод выделения полного квадрата*:

$x^2 + (y^2 - 10y) + (z^2 + 4z) + 25 = 0 \quad \Rightarrow$

$x^2 + (y^2 - 2 \cdot 5y + 25 - 25) + (z^2 + 2 \cdot 2z + 4 - 4) + 25 = 0 \Rightarrow$

$x^2 + (y - 5)^2 - 25 + (z + 2)^2 - 4 + 25 = 0 \Rightarrow$

$x^2 + (y - 5)^2 + (z + 2)^2 = 4.$

Таким образом, центр сферы находится в точке $0'(0; 5; -2)$, а радиус ее равен $R = 2$.

Ответ. $0'(0; 5; -2)$, $R = 2$.

5.3 Задачи для самостоятельного решения

235. Построить плоскости, заданные уравнениями:

1) $5x + 2y + 3z = 15$; 2) $3x + 2y - 6 = 0$;

3) $3z - 5 = 0$; 4) $x - 4y + 2z = 0$;

5) $3x - z = 0$.

Определить координаты их нормальных векторов.

236. Построить прямые: 1) $\begin{cases} 2x + 3y + 3z - 7 = 0; \\ x + 2y + 2z - 4 = 0. \end{cases}$ **2)** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{2}$.

Указать координаты направляющих векторов.

237. Даны две точки A(3; 5; 6) и B(5; -7; 4). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к вектору $\overline{AB}$.

238. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку M (3; -1; 2) и параллельной вектору $\bar{s} = (1; 0; -2)$;

б) точки A (3; -1; 4) и B (1; 1; 2).

239. Найти углы:

а) между плоскостями: $x - 2y + 2z - 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$;

б) между прямыми: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$ и $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+5}{2}$;

в) между прямой: $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ и плоскостью 4x + y + z – 3 = 0.

240. Найти расстояние от точки М (1; 3; -2) до плоскости 2x – 3y – 4z + 28 = 0.

241. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М (1; -2; 4) параллельно плоскости 3x – 2y + 5z – 4 = 0.

242. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М (1; -2; 4) перпендикулярно к плоскостям 2x + 3y – 5z + 6 = 0 и 3x + 4y – 3z – 5 = 0.

243. Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости *XYZ* и проходящей через точку М (2; 3; 0) перпендикулярно к прямой $\frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{-1}$.

244. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку А (0; -4; 2) параллельно прямой $\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

245. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости x + y – z – 2 = 0.

246. Найти координаты центра и радиус сферы

$x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0.$

---

247. Найти точки пересечения плоскости x + 2y + z – 8 = 0 с осями координат, построить эту плоскость. Указать нормальный вектор.

248. Как расположены плоскости относительно осей координат:

а) x – y = 4; б) x + y +3z = 0; в) y – 6 = 0; г) 3y + z = 0?

Построить эти плоскости и указать нормальные векторы.

249. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М (-1; 2; 3) перпендикулярно вектору (3; -1; 5).

250. Определить как расположены плоскости (параллельно или перпендикулярно):

4x – 3y + 5z – 3 = 0 и x – 2y – 2z + 7 = 0 .

251. Найти расстояние от точки M (5; 1; -1) до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

252. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку К (1; -5; 6) параллельно плоскости 3x – y + 5z – 7 = 0.

253. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(0;-3;8) параллельно вектору $\bar{s}$ (-1; 3; 4).

254. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки M_1 (0; 1; -3) и M_2 (-4; 5; 1).

255. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку A(-2;3;1) параллельно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{4}$.

256. Найти координаты центра и радиус сферы:

$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 10z - 75 = 0$.

257. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2; 4; 7) параллельно оси: а) OX; б) OУ; в) OZ.

---

258. Построить плоскости и указать координаты их нормальных векторов:

а) 5x – 2y +3z –10 = 0; б) 3x + 2y – z = 0;

в) 3x + 2z = 6; г) 2z – 7= 0.

259. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (4; 5; -3) и перпендикулярной вектору $\bar{n}$ = (2; 1; 4).

260.Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A(4;5;6) и перпендикулярной вектору $\overline{OA}$.

261. Даны точки M_1 (0; -1; 3) и M_2 (1; 3; 5). Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной к вектору $\overline{M_1M_2}$.

262. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M (2; -1; 3) и отсекающей на осях координат равные отрезки.

263. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (3; 1; 0) и M_2 (1; 3; 0) и параллельной оси OZ.

264. Написать уравнение плоскости, проходящей через:

а) точку M(0; 5; 6) и ось OX;

б) точку M(6; 0; 4) и ось ОУ;

в) точку M(2; -4; 3) и ось OZ.

265. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(2;-5; 4) и параллельной координатной плоскости: а) XOУ; б) XOZ; в) УOZ.

266. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (2; -1; 3) параллельно плоскости $2x + 3y - 4z + 5 = 0$.

267. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку M(2;3;-1) параллельно плоскости $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

268. Определить двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

а) $x + 2z - 6 = 0$ и $x + 2y - 4 = 0$;

б) $3y - z = 0$ и $2y + z = 0$;

в) $6x + 3y - 2z = 0$ и $x + 2y + 6z - 12 = 0$;

г) $x + 2y + 2z - 3 = 0$ и $16x + 12y - 15z - 1 = 0$.

269. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (5;3;2) и параллельной двум векторам: $\bar{a} = (4;1;2)$ и $\bar{b} = (5;3;1)$.

270. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось ОУ и составляющей с плоскостью $2x - \sqrt{5} \cdot y + z - 4 = 0$ угол $\frac{\pi}{3}$.

271. Написать уравнение плоскости проходящей через точку M_1 (-1; -2; 0) и перпендикулярной плоскости $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

272. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (0; -1; 3) перпендикулярно к плоскостям $x + y - 2z + 5 = 0$ и $2x - y + 3z - 1 = 0$.

273. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку M_0 (3; 5; 2) перпендикулярно к плоскости $2x - 3y = 0$.

274. Найти расстояние от точки B(5;1;-1) до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

275. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

$4x + 3y - 5z - 8 = 0$ и $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

276. Построить прямые и записать их направляющие векторы:

а) $\begin{cases} 2x+3y+4z-7=0; \\ x+2y+3z-4=0; \end{cases}$ б) $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y-6}{4}=\dfrac{z-4}{5}$.

277. Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точки А(-1; 2; 3), В(2; 6; -2).

278. Написать уравнение прямой, лежащей в плоскости *ХОУ* и проходящей через точку К(0,5; 0,6; 0,7) перпендикулярно плоскости 3x + 4y – 8z – 15 = 0.

279. Показать что прямая $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ перпендикулярна прямой $\begin{cases} x=z+1; \\ y=1-z. \end{cases}$

Указание. Привести уравнение второй прямой к каноническому виду.

280. Написать уравнения прямой, проходящей через точку К(6; 7; -1) и параллельной вектору $\bar{s}$ = (-1; 2; -3).

281. Написать параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точку М (2; 1; -1) и параллельной вектору $\bar{s}$ = (1;-2; 3); б) проходящей через точки M_1 (3; -1; 4) и M_2 (1; 3;2).

282. Написать уравнения прямой, проходящей через точку М(1; 4; -1) и параллельной прямой x – y = 2, y = 2z + 1.

283. Написать уравнения прямой, проходящей через точку (1; -2; 3):

а) параллельной оси OZ; б) перпендикулярной оси OZ.

284.Найти следы прямой $\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$ на координатных плоскостях и построить прямую.

285. Найти углы между прямыми:

а) $\begin{cases} 2x-y-7=0; \\ 2x-z+5=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x-2y+8=0; \\ z=3x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y+z-4=0; \\ 2x+y-2z+5=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-4=0; \\ 2x+3y-z-6=0; \end{cases}$

в) $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-4}{-2}$ и $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{-4}$;

г) $\begin{cases} 2x-3y-4z+5=0; \\ x-2y-3z-1=0; \end{cases}$ и $\dfrac{x-5}{21}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{4}$.

286. Доказать, что прямые параллельны:

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-8}{-1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x-3y+z-5=0; \\ x-2y-z+2=0. \end{cases}$$

287. Доказать, что прямые взаимно перпендикулярны:

а) $\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+5}{-1}$ и $\begin{cases} x+2y-3z+1=0; \\ x+2z-y-3=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x+4y-z-1=0; \\ 2x+3y+z+2=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x=1+2t; \\ y=2+3t; \\ z=5+t. \end{cases}$

288. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(2; 0; 3) перпендикулярно к прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-4}{-2}$ и расположенной в плоскости XOZ.

289. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0(1;-1; 3) параллельно линии пересечения плоскостей x – 2y + 3z – 5 = 0 и 3x + y – 2z + 1 = 0.

290. Написать уравнение плоскости, проходящей через:

а) точку M(2;3;-4) и перпендикулярной к прямой x =2, y – z = 1;

б) точку N(3; 4; 5) и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{3}$;

в) прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной к плоскости 2x + 3y – z + 7 = 0;

г) точку K (4; -3; 1) и параллельно прямым $\frac{x}{6}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$ и $\frac{x+1}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{2}$;

д) точки M, N, K.

291. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0 (-3; -2; 5) перпендикулярно плоскости 5x + 3y - 8z +1 = 0.

292. Вычислить угол φ между прямой a и плоскостью α, если:

а) a: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-6}{1}$; $\qquad \alpha: \ 4x+2y-2z+5=0;$

б) a: y = 3x – 1, 2z = -3x + 2; $\alpha: \ 2x + y + z - 4 = 0$.

293. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x - y + 3 = 0; \\ 6y + 1 = 0 \end{cases}$ и пересекающей прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ под углом 45^0.

294.Найти проекцию точки А(1;-3;2) на плоскость 6x + 3y–z – 41 = 0.

295.Установить, лежит ли прямая a в плоскости α, параллельно плоскости или пересекает ее, если:

а) a: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$; α: 3x – y +2z + 5 = 0;

б) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$; α: 4x + 2y + z + 24 = 0;

в) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+5}{2}$; α: 4x + y – z = 0.

296. Найти точку пересечения плоскостей:

а) 3x – 5y + 8z – 12 = 0; 2x – 3y + 5z – 8 = 0; 2x + y + 7z – 20 = 0.

б) 2x – 3y + z – 5 = 0; x – 2y - 2z + 6 = 0; 3x - 4y + 4z – 16 = 0.

297.Составить уравнения плоскости, проецирующей прямую $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{2}$ на плоскость 3x – 2y +5z –6 = 0.

298. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1}$: а) параллельно прямой $\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-6}{2}$;

б) перпендикулярно к плоскости 2x – 3y + 4z – 7 = 0.

299. Найти канонические уравнения прямой, проходящей через точку А(5; -2; 3) и точку пересечения прямой $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-5}{1}$ и плоскости x +2y – z – 1 = 0.

300. Найти центры и радиусы сфер:

а) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}(y+7)^2 + \sqrt{3}(z-1)^2 = 9 \cdot \sqrt{3}$;

б) $(x-5)^2+(4+y)^2+(z-4)^2-5=0;$

в) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z=2$;

г) $x^2+y^2+z^2-2x+6y+6=0;$

д) $x^2+y^2+z^2-2x=2.$

Тест 5

1.Выбрать плоскость, параллельную плоскости x – 2z + 5 = 0:

а) 4x + 8z + 10 = 0; б) 2x + z + 1 = 0; в) 2x - 4z + 5 = 0.

2.Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-3}$:

а) x + 2y – 3z = 0; б) x – 2y = 0; в) x + 2y + 1 = 0.

3.Найти координаты направляющего вектора прямой

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+5}{-1}:$$

а) $\bar{\ell}$ = (3, 5, -5); б) $\bar{\ell}$ = (0, 2, -1); в) $\bar{\ell}$ = (-3, -4, -5).

4.Укажите координаты центра и радиус сферы $x^2+y^2+z^2-10y+4z+25=0$:

а) C (0, -5, 2), R = 2; б) C (0, 5, -2), R = 2; в) C (0, 5, -2), R = 5.

5.Укажите координаты нормального вектора плоскости 4x – 5z = 0:

а) $\bar{n}$ = (4, -5, 0); б) $\bar{n}$ = (-4, 5, 0); в) $\bar{n}$ = (4, 0, -5).

6.Напишите уравнение прямой, проходящей через точку A (0; -4; 3) и параллельно прямой $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-3}$

а) $\frac{x}{1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-3}{-3}$; б) $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z+1}{3}$; в) $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{-3}$.

7.Какая из трех плоскостей проходит через ось OZ:

а) 3x + y = 0; б) z + 6 = 0; в) 3x + 2z = 0?

8. Укажите взаимное расположение плоскостей 4x – y + 5z – 3 = 0 и x – 6y – 2z + 5 = 0: а) параллельны, б) перпендикулярны, в) пересекаются (не под прямым углом).

9.Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости x+y–z+2= 0:

а) A (4; -5,;1); б) A (0; 1; -1); в) A (1; 1; -1).

10.Найти координаты направляющего вектора прямой $\begin{cases} 4x+3y-z=0 \\ 2y+z+4=0 \end{cases}$

а) $\bar{l}$ = (0; 6; -1); б) $\bar{l}$ = (5; -4; 8); в) $\bar{l}$ = (4; 3; -1).

11. Найти соответствие между утверждениями относительно двух плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (1), $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (2), прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ и их признаками:

1) плоскости параллельны;	а) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;
2) плоскости перпендикулярны;	б) $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$;
3) плоскость (1) и прямая параллельны;	в) $A_1m+B_1n+C_1p=0$;
4) плоскость (1) и прямая перпендикулярны	г) $\frac{A_1}{m}=\frac{B_1}{n}=\frac{C_1}{p}$.

12. Даны нормальные векторы соответственно плоскостей α и β: $\overline{n_\alpha}$ = (A_1; B_1; C_1), $\overline{n_\beta}$ = (A_2; B_2; C_2), и направляющие векторы прямых a и b: $\overline{S_a}$ = (m_1; n_1; p_1), $\overline{S_b}$ = (m_2; n_2; p_2). Найти соответствие между утверждениями и их признаками:

1. плоскость α параллельна плоскости β ($\alpha \mid\mid \beta$)	а) $\overline{S_a} \perp \overline{S_b}$
2. плоскость α перпендикулярна плоскости β ($\alpha \perp \beta$)	б) $\overline{n_\alpha} \mid\mid \overline{n_\beta}$
3. прямые перпендикулярны ($a \perp b$)	в) $\overline{n_\alpha} \perp \overline{S_a}$
4. прямые параллельны ($a \mid\mid b$)	г) $\overline{n_\alpha} \perp \overline{S_b}$
5. прямая β параллельна плоскости α ($b \mid\mid \alpha$)	д) $\overline{S_a} \mid\mid \overline{n_\alpha}$
6. прямая ℓ параллельна плоскости β ($b \mid\mid \beta$)	ж) $\overline{S_a} \mid\mid \overline{n_\beta}$
7. a ∣∣ α	з) $\overline{n_\alpha} \perp \overline{n_\beta}$
8. b ⊥ β	и) $\overline{S_b} \mid\mid \overline{n_\beta}$
9. a ⊥ α	к) $n_\alpha \mid\mid S_в$
10. a ⊥ β	л) $n_\beta \perp S_в$
11. b ⊥ α	м) $\overline{S_a} \mid\mid \overline{S_b}$

13.Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (2; 3; -1) параллельно плоскости $4x - 2y + 5z - 3 = 0$ имеет вид:

$4x + By + Cz + D = 0$, где $B = \ldots$, $C = \ldots$, $D = \ldots$.

14.Прямые $\begin{cases} x + y - z + 4 = 0; \\ 2x - 3y - z - 5 = 0; \end{cases}$ и $\frac{x+3}{4} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{2}$ пересекаются в точке (x_0, y_0, z_0), где $x_0 = \ldots$, $y_0 = \ldots$, $z_0 = \ldots$.

15. При пересечении плоскости $x + 2y - 2z + 1 = 0$ и $x + y - 4 = 0$ образуют смежные углы: $\varphi_1 = \ldots$ $\varphi_2 = \pi - \varphi_1 = \ldots$

Вопросы для самопроверки по теме «Прямая и плоскость в пространстве»

1.Понятие поверхности. Сферическая поверхность.

2.Плоскость. Основные виды уравнения плоскости (плоскость, проходящая через заданную точку с заданным нормальным вектором; в отрезках; общее уравнение плоскости).

3.Исследование общего уравнения плоскости.

4.Прямая в пространстве. Виды уравнений прямой в пространстве (общее; каноническое; параметрическое уравнения; уравнение прямой, проходящей через две точки).

5.Взаимное расположение двух плоскостей: угол между плоскостями, условие параллельности, условие перпендикулярности.

6.Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве: угол между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности.

7.Взаимное расположение двух прямых в пространстве: угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.

8.Расстояние от точки до плоскости.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Красс, М.С. Математика для экономического бакалавриата: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. — М.: ИНФРА-М, 2012.— 472 с.

2. Тришин, И.М. Математика для экономистов и менеджеров. Практикум (для бакалавров) [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.М. Тришин, Б.А. Путко, М.Н. Фридман ; под ред. Кремера Н.Ш.. — Электрон. дан. — Москва :КноРус, 2014. — 480 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/53456 . — Загл. с экрана.

3. Кундышева, Е.С. Математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебник / Е.С. Кундышева. — Электрон. дан. — Москва : Дашков и К, 2015. — 564 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/72390. — Загл. с экрана.

Дополнительная литература

1. Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник / П.С. Александров. – СПб.: Лань, 2009. – 512 с.

2.Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения: учеб. пособие / И.А. Соловьев и др. – СПб.: Лань, 2009. – 320 с.

3.Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу [и др.]. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Жуплей Ирина Викторовна

Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: Учебное пособие для практических занятий и самостоятельной работы для обучающихся по направлению подготовки 38.03.01 Экономика

Подписано в печать_________201__ Формат 60х90 1/6. Бумага писчая.
Печать офсетная. Уч.-изд.л __. Тираж__ экз. Заказ __

ФГБОУ ВО Приморская ГСХА
Адрес: 692510, г. Уссурийск, пр-т Блюхера, 44

Участок оперативной полиграфии ФГБОУ ВО Приморская ГСХА
692500, г. Уссурийск, ул. Раздольная, 8а