Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Приморская государственная сельскохозяйственная академия
Инженерно-технологический институт

М А Т Е М А Т И К А

Методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры Часть 1

Электронное издание

Уссурийск 2021

Составитель: Савельева Е.В., канд.тех.наук, доцент инженерно-технологического института.

Математика: методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки. Часть 1. 21.03.02 Землеустройство и кадастры [Электронный ресурс]: / Е.В. Савельева; ФГБОУ ВО ПГСХА. - Электрон. текст дан. - Уссурийск: ПГСХА, 2021. - 65 с. - Режим доступа: www. de.primacad.ru.

Рецензент: И.В. Жуплей, к.э.н., доцент института землеустройства и агротехнологии.

Методические указания составлены в соответствии требованиям стандарта ФГОС 3++ по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры, содержат контрольные задания для самостоятельной работы обучающихся и методические указания по их выполнению.

Издается по решению методического совета ФГБОУ ВО Приморская ГСХА.

Введение

Настоящие методические указания составлены с целью помочь студенту-заочнику овладеть основными приемами и методами решения задач по высшей математике, привить умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике, повысить общий уровень математической культуры.

В методических указаниях приводятся рекомендации по изучению дисциплины, указания к выполнению контрольных работ, образцы решения типовых задач, контрольные задания.

Общие методические указания

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом: чтение учебников, решение задач, выполнение контрольных заданий. Перед выполнением каждой контрольной работы студент должен изучить указанные темы (ДЕ), используя литературу и лекции.

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольные задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать ее условие.

2. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами.

3. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с ***последней цифрой*** *его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (т. е. 1, 3, 5, 7, 9), то номера задач соответствующего варианта даны в таблице 1.*

Если предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (т. е. 2, 4, 6, 8, 0), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 2.

Литература

Основная литература

1.Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 11-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 608 с.

2.Сборник задач по высшей математике: 1 курс / К.Н. Лунгу и др. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

3. Махова, Н. Б. Неопределенные и определенные интегралы: курс лекций: учебное пособие / Н. Б. Махова, Ф. К. Мацур. — Москва: РУТ (МИИТ), 2015. — 68 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/188452. — Режим доступа: Режим доступа: по подписке ПримГСХА. — Текст: электронный.

4. Богомолов, Н. В. Математика: учебник / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2019. — 401 с. — ISBN 978-5-534-07001-9. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/431945 — Режим доступа: по подписке ПримГСХА. — Текст: электронный.

Дополнительная литература

1. Зайцев И.А. Высшая математика: учеб. для вузов/ И.А. Зайцев. – 4-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2005.- 398с.

2. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т.Письменный, Ю.А.Шевченко. – под ред. С.Н. Федина. – 4 –е изд. – М: Айрис – пресс, 2006. – 592 с.: ил. – (Высшее образование).

Таблица №1

№	**Контрольная работа** **предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (т. е. 1, 3, 5, 7,9)**															
1	2	12	22	32	42	52	62	73	83	93	104	114	124	134	144	152
2	3	13	23	33	43	53	63	74	84	94	105	115	125	135	145	153
3	4	14	24	34	44	54	64	75	85	95	106	116	126	136	146	156
4	5	15	25	35	45	55	65	76	86	96	107	117	127	137	147	151
5	6	16	26	36	46	56	66	77	87	97	108	118	128	138	148	158
6	7	17	27	37	47	57	67	78	88	98	109	119	129	139	149	160
7	8	18	28	38	48	58	68	79	89	99	110	120	130	140	150	155
8	9	19	29	39	49	59	69	80	90	100	101	111	121	131	141	154
9	10	20	30	40	50	60	70	71	81	91	102	112	122	132	142	157
0	1	11	21	31	41	51	61	72	82	92	103	113	123	133	143	159

Таблица №2

№	**Контрольная работа** **предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (т. е. 2, 4, 6, 8, 0)**															
1	5	14	23	31	40	51	66	77	88	93	100	119	123	130	141	155
2	6	13	24	32	47	52	67	78	89	94	101	118	125	131	150	151
3	7	12	25	36	42	53	68	79	90	95	102	117	126	132	142	158
4	8	11	26	33	43	56	69	80	81	96	103	116	127	133	143	152
5	1	18	27	39	49	60	65	71	82	97	104	115	128	134	144	153
6	2	19	28	38	48	57	70	72	83	98	105	114	129	135	145	159
7	3	20	29	40	50	52	61	73	84	99	106	113	130	136	146	155
8	4	11	30	34	43	58	62	74	86	100	107	112	121	137	147	157
9	10	16	21	35	44	55	63	80	85	91	108	120	122	138	148	154
0	9	17	22	37	41	54	64	75	87	92	109	111	124	139	149	160

Дисциплина и ее основные разделы, изучаемые на 1 курсе

№ ДЕ	Наименование дидактической единицы	№ темы	Основные разделы ДЕ
1	Линейная алгебра	1	Определители 2 и 3 порядка. Их вычисление. Миноры и алгебраические дополнения, разложение определителя по элементам какого-либо ряда. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
		2	Матрицы. Операции над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы.
		3	Системы линейных уравнений. Матричная запись системы линейных уравнений. Правило Крамера. Система n- линейных уравнений с n- неизвестными. Метод Гаусса.
2	Аналитическая геометрия	4	Метод координат. Основные задачи аналитической геометрии (расстояние между двумя точками на плоскости, середина отрезка).
		5	Уравнение прямой на плоскости. Понятие об уравнении линии. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой проходящей через данную точку в данном направлении, уравнение прямой проходящей через две данные точки. Взаимное расположение прямых на плоскости, угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности.
		6	Канонические уравнения кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Их геометрические свойства, технические приложения геометрических свойств кривых.
		7	Плоскость и прямая в пространстве. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение плоскости, его частные виды. Угол между плоскостями; условия параллельности и перпендикулярности. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.
		8	Поверхности второго порядка. Цилиндрические поверхности. Канонические уравнения поверхностей второго порядка (сфера, конусы, эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды). Геометрические свойства этих поверхностей, исследование их формы методом сечений.

3	Векторная алгебра	9	Векторы, основные понятия. Линейные операции над векторами, заданными геометрически (сложение, вычитание, умножение вектора на число). Понятие компланарности и коллинеарности векторов.
		10	Векторы, заданные координатами. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по базису координатных осей.Координаты вектора. Длина вектора. Направляющие косинусы. Условие коллинеарности.
		11	Произведение векторов. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их свойства, выражение через координаты.
4	Математический анализ	12	Введение в математический анализ. Определение функции. Область определения, способы задания. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Предел переменной величины, его свойства. Предел функции. Неопределенные выражения и способы их раскрытия. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва.
		13	Дифференцирование функции одной переменной. Правила и формулы дифференцирования. Дифференциал функции. Основные теоремы дифференциального исчисления (правило Лопиталя, теоремы Ролля, Лагранжа). Применение дифференциального исчисления к исследованию функции (возрастание и убывание функции, точки экстремума, выпуклость и вогнутость, точки перегиба, асимптоты). Физические приложения.
		14	Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл: понятие первообразной, методы интегрирования (замена переменной, по частям), интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен, интегрирование рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных выражений.
		15	Определенный интеграл. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла (задача о нахождении площади криволинейной трапеции, пути при неравномерном движении, работы переменной силы), вычисление определенного интеграла (формула Ньютона – Лейбница), методы интегрирования , геометрические и физические приложения.
		16	Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от разрывных функций.
		17	Приближенные вычисления определенных интегралов. Методы вычисления по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона.

<u>Тема:1</u> Элементы линейной алгебры (задачи 1-10). Перед выполнением задач необходимо изучить разделы 1, 2, 3 ДЕ-1(линейная алгебра).

1-10. Решить систему линейных уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) матричным методом;

в) сделать проверку найденного решения.

1. $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + 2z = 4 \\ x - y + 4z = -2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 5 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ x + 3y - 2z = -2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 2x + 3y + z = -3 \\ x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = -7 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x + 4y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = -4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 4y + 2z = 1 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ x + y + 2z = -1 \\ 2x - y - z = 2 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x + y + 5z = -1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 2x + y - z = -7 \\ x - 5y + 2z = 2 \end{cases}$

Решение типового примера

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x - y + 3z = 1 \\ 8x - 3y + 6z = -2 \end{cases}$$

а) по формулам Крамера;

б) матричным методом;

в) сделать проверку найденного решения.

Решение.

а) Для решения заданной системы линейных уравнений воспользуемся формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу разложения по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Составим и вычислим главный определитель системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(-6-(-9)\right) - 1\cdot\left(24-24\right) + 1\cdot\left(-12-(-8)\right) = 2$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Для его отыскания вычислим вспомогательные определители $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Для вычисления Δx в главном определителе первый столбец заменим столбцом свободных членов, для вычисления Δy и Δz соответственно второй и третий.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 7\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(-6+9) - (6+6) + (-3-2) = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(6+6) - 7(24-24) + (-8-8) = 8$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}2&1&7\\4&-1&1\\8&-3&-2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\-3&-2\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}4&1\\8&-2\end{vmatrix}+7\cdot\begin{vmatrix}4&-1\\8&-3\end{vmatrix}=$$

$$=2(2+3)-(-8-8)+7(-12+8)=-2$$

По формулам Крамера получим:

$$x=\frac{4}{2}=2;\qquad y=\frac{8}{2}=4;\qquad z=\frac{-2}{2}=-1.$$

б) $$\begin{cases}2x+y+z=7\\4x-y+3z=1\\8x-3y+6z=-2\end{cases}\qquad(1)$$

Данную систему запишем в матричной форме и решим с помощью обратной матрицы.

Пусть A – матрица коэффициентов при неизвестных; X – матрица-столбец неизвестных x,y,z и H – матрица-столбец из свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\4&-1&3\\8&-3&6\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix}7\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Левую часть системы (1) можно записать в виде произведения матриц $A\cdot X$, а правую в виде матрицы H. Следовательно имеем матричное уравнение

$$A\cdot X=H.\qquad(2)$$

Если определитель матрицы A отличен от нуля, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножим обе части равенства (2) слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot H.$$

Так как $A^{-1}\cdot A=E$, где E – единичная матрица, а $E\cdot X=X$, то

$$X = A^{-1} \cdot H . \quad (3)$$

Формулу (3) называют матричной записью решения системы линейных уравнений. Чтобы воспользоваться формулой (3), необходимо сначала найти обратную матрицу по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где ΔA- определитель матрицы коэффициентов, $\Delta A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 3\\ 8 & -3 & 6\end{vmatrix}=2$,

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$ - алгебраическое дополнение к элементам матрицы,

M_{ij}- минор, определитель второго порядка, полученный путем вычеркивания *i*-ой строки и *j*-ого столбца.

Пример:

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 8 & -3\end{vmatrix}=14.$$

Подставляя полученные значения алгебраических дополнений и ΔA в формулу (4), получим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -9 & 4\\ 0 & 4 & -2\\ -4 & 14 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}5 & -4{,}5 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 7 & -3\end{pmatrix}.$$

Заменив (3) соответствующими матрицами, имеем

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}5 & -4{,}5 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & 7 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7\\ 1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10{,}5-4{,}5-4\\ 0+2+2\\ -14+7+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\\ 4\\ -1\end{pmatrix},$$

где элементы неизвестной матрицы получены путем умножения строк обратной матрицы на соответствующие элементы матрицы свободных членов. Откуда $x=2$; $y=4$; $z=-1$.

в) Проверим правильность полученного решения, подставив его в каждое уравнение заданной системы:

$$\begin{array}{lcl} 2\cdot 2+4-1=7 & & 7=7 \\ 4\cdot 2-4+3\cdot\left(-1\right)=1 & \Rightarrow & 1=1 \\ 8\cdot 2-3\cdot 4+6\cdot\left(-1\right)=-2 & & -2=-2 \end{array}.$$

Получили три верных равенства, система решена правильно.

<u>Тема:2</u> Аналитическая геометрия на плоскости (задачи 11-20, 21-30). Перед выполнением задач необходимо изучить разделы 4,5,6 ДЕ-2(аналитическая геометрия).

11-20. Даны координаты вершин треугольника АВС.

Найти: 1. длину стороны АВ;

2. уравнение сторон АВ и ВС и их угловые коэффициенты.

3. угол при вершине В в радианах с точностью до двух знаков;

4. уравнение высоты СД;

5. уравнение медианы АЕ и координаты точки К пересечения этой медианы с высотой СД;

6. уравнение прямой, проходящей через точку К параллельно стороне АВ;

Решение данной задачи проиллюстрируйте на рисунке.

11. А(-1; 5), В(11; 0), С(17; 8)
12. А(6; 5), В(-6; 0), С(-10; 3)
13. А(-2; 6), В(10; 1), С(16; 9)
14. А(10; -1), В(-2; -6), С(-6; -3)
15. А(-1; 7), В(11; 2), С(17; 10)
16. А(-2; -6), В(-3; 5), С(4; 0)
17. А(2; -3), В(-1; -6), С(0; 1)
18. А(0; 2), В(-7; 4), С(3; 2)
19. А(-5; 7), В(7; -2), С(11; 20)
20. А(-8; -3), В(4; -12), С(8; 10)

Решение типового примера

Даны координаты вершин треугольника АВС: А(4;3), В(16;-6), С(20;16).

Найти: 1) длину стороны АВ; 2) уравнение сторон АВ и ВС и их угловые коэффициенты; 3) угол при вершине В в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение высоты СД; 5) уравнение медианы АЕ и координаты точки К пересечения этой медианы с высотой СД; 6) уравнение прямой, проходящей через точку К параллельно стороне АВ.

Решение.

1) Расстояние d между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

Применяя (1), находим длину стороны AB:

$$AB = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144+81} = 15.$$

2) Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

Подставляя в (2) координаты точек A и B, получим уравнение стороны AB:

$$\frac{y-3}{-6-3} = \frac{x-4}{16-4}; \quad \frac{y-3}{-9} = \frac{x-4}{12}; \quad \frac{y-3}{-3} = \frac{x-4}{4};$$

$4y-12=-3x+12$; $3x+4y-24=0$ (AB).

Решив последнее уравнение относительно y, находим уравнение стороны AB в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$4y=-3x+24$; $y = -\frac{3}{4} + 6$, откуда $k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Подставив в (2) координаты точек B и C, получим уравнение прямой BC:

$11x-2y-188=0$ (BC), или $y=5{,}5x-94$, откуда $k_{BC} = 5{,}5$.

3) Известно, что тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты, которых соответственно равны k_1 и k_2 вычисляется по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (3)$$

Искомый угол B образован прямыми AB и BC, угловые коэффициенты которых найдены: $k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $k_{BC} = 5,5$. Применяя (3), получим

$$tgB = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB}k_{BC}} = \frac{-\frac{3}{4} - 5,5}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 5,5} = \frac{-25}{4 - 16,5} = 2$$ $B \approx 63^0 26'$, или $B \approx 1,11\,рад.$

4) Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4)$$

Высота CD перпендикулярна стороне AB. Чтобы найти угловой коэффициент высоты CD, воспользуемся условием перпендикулярности прямых $k_2 = -1/k_1$. Так как $k_{AB} = -3/4$, то $k_{CD} = 4/3$. Подставив в (4) координаты точки C и найденный угловой коэффициент высоты, получим

$y - 16 = \frac{4}{3}(x - 20)$; $3y - 48 = 4x - 80$; $4x - 3y - 32 = 0$ *(CD)*.

5) Чтобы найти уравнение медианы AE, определим сначала координаты точки E, которая является серединой стороны BC, применяя формулы деления отрезка на две равные части:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (5)$$

Следовательно,

$$x_E = \frac{16 + 20}{2} = 18; \quad y_E = \frac{-6 + 16}{2} = 5; \quad E(18;5).$$

Подставив в (2) координаты точек *A* и *E*, находим уравнение медианы:

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-4}{18-4}; \qquad \frac{y-3}{2}=\frac{x-4}{14};$$

$$x-7y+17=0 \ (AE).$$

Чтобы найти координаты точки пересечения высоты *CD* и медианы *AE*, решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 3y - 32 = 0, \\ x - 7y + 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 11, y = 4; \quad K(11;4).$$

6) Так как искомая прямая параллельна стороне *AB*, то ее угловой коэффициент будет равен угловому коэффициенту прямой *AB*. Подставив в (4) координаты найденной точки *K* и угловой коэффициент $k = -3/4$, получим

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 11); \qquad 4y - 16 = -3x + 33;$$

$3x + 4y - 49 = 0$ *(KF)*

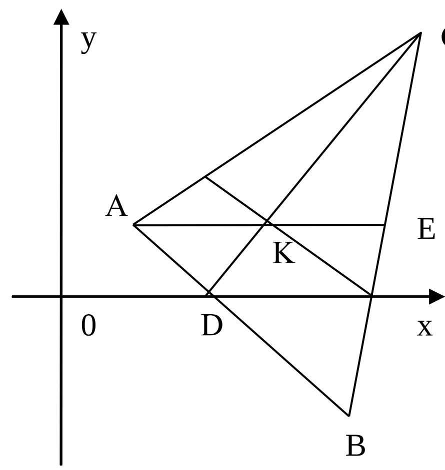


Рисунок 1

Треугольник *ABC*, высота *CD*, медиана *AE*, прямая *KF* и точка *M* построим в системе координат *xOy* на рисунке 1

21-30. Построить кривые второго порядка, приведя их к каноническому виду. В пунктах: а) для кривых найти координаты фокусов и эксцентриситет; б) для кривых найти фокус и уравнение директрисы.

21. а) $16x^2 + 25y^2 = 400$ б) $x^2 + 6x + 4y + 13 = 0$

22. а) $49x^2 + 4y^2 = 196$ б) $y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

23. а) $3x^2 + 5y^2 = 15$ б) $x^2 + 8y + 8x + 16 = 0$

24. а) $36x^2 + 9y^2 = 324$ б) $x^2 - 4x + 2y + 2 = 0$

25. а) $9x^2 + 16y^2 = 144$ б) $x^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

26. а) $5x^2 + 20y^2 = 100$ б) $2x^2 - 12x + y + 18 = 0$

27. а) $9x^2 + 4y^2 = 36$ б) $y^2 - 14y + 2x + 43 = 0$

28. а) $16x^2 + 8y^2 = 128$ б) $x^2 - 4x + y = 0$

29. а) $4x^2 + 36y^2 = 144$ б) $y^2 + 4y + 2x = 0$

30. а) $25x^2 + 6y^2 = 150$ б) $y^2 + 2x + 2y - 15 = 0$

Решение типового примера.

Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить кривую:

$y^2 - 4y + 12x + 40 = 0$.

Решение:

Преобразуем уравнение:

$$\left(y^2 - 4y\right) + 12x + 40 = 0$$

Выражение в скобках дополним до полного квадрата:

$$\left(y^2 - 4y + 4\right) - 4 + 12x + 40 = 0$$

$$(y-2)^2 + 12x + 40 = 0$$

$$(y-2)^2 = -12(x+3)$$

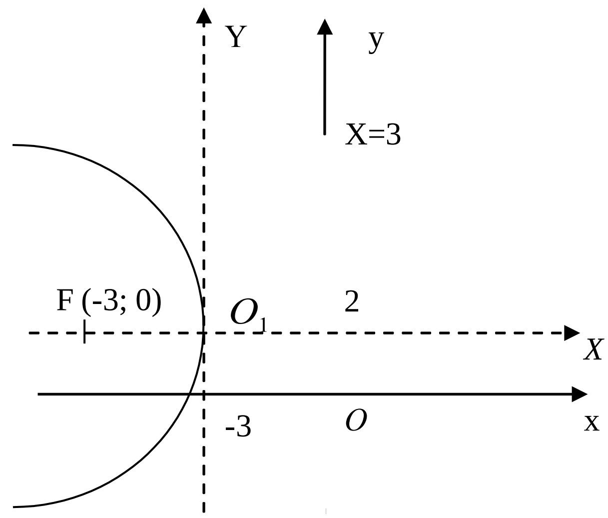


Рисунок 2

Введем новую систему координат, которая связана с исходными формулами преобразования:

$$\begin{cases} X = x + 3 \\ Y = y - 2 \end{cases}$$

Выполним параллельный перенос осей координат в новое начало координат $O_1(-3;2)$, при этом уравнение примет вид: $Y^2 = -12X$.

Данная кривая является параболой вида $Y^2 = 2pX$ с вершиной в точке O_1,

ветви влево *(p<0).* Фокус параболы и уравнение директрисы находятся по формулам: *F (p/2;0); x=p/2.* Следовательно, в новой системе координат фокус у данной параболы имеет координаты *-F(-3;0)*, а директриса уравнение - *X=3.* Чертеж параболы на рисунке 2.

<u>Тема:3</u> Элементы векторной алгебры (задачи 31-40). Перед выполнением задач необходимо изучить вопросы 9,10,11 ДЕ-3(векторная алгебра).

31-40. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*.

Требуется:

1. **записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, и $\overrightarrow{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов;**
2. **найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;**
3. **найти площадь грани *ABC*;**
4. **найти объем пирамиды *ABCD*.**

31	A(2;-3;1)	B(6;1;-1)	C(4;8;-9)	D(2;-1;2)
32	A(5;-1;-4)	B(9;3;-6)	C(7;10;-14)	D(5;1;-3)
33	A(1;-4;0)	B(5;0;-2)	C(3;7;-10)	D(1;-2;1)
34	A(-3;-6;2)	B(1;-2;0)	C(-1;5;-8)	D(-3;-4;3)
35	A(-1;1;-5)	B(3;5;-7)	C(1;12;-15)	D(-1;3;-4)
36	A(-4;2;-1)	B(0;6;-3)	C(-2;13;-11)	D(-4;4;0)
37	A(0;4;3)	B(4;8;1)	C(2;15;-7)	D(0;6;4)
38	A(-2;0;-2)	B(2;4;-4)	C(0;11;-12)	D(-2;2;-1)
39	A(3;3;-3)	B(7;7;-5)	C(5;14;-13)	D(3;5;-2)
40	A(4;-2;5)	B(8;2;3)	C(6;9;-5)	D(4;0;6)

Решение типового примера

Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*: *A(2;1;0);B(3;-1;2), C(13;3;10), D(0;1;4)*. Требуется: 1)записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, и $\overrightarrow{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов; 2)найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) найти площадь грани *ABC*; 4) найти объем пирамиды *ABCD*; 5) уравнение плоскости *Q*, проходящей через точки *A, B*, и *C*; 6) канонические уравнения прямой, проходящей через точку *D* перпендикулярно плоскости *Q*,; 7) точки пересечения полученной прямой с плоскостью *Q*,и с координатными плоскостями *xOy, xOz, yOz*;

Решение.

1) Произвольный вектор $\vec{a}$ может быть представлен в системе орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ следующей формулой:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \qquad (1)$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси *Ox,Oy,Oz,*

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы, направления которых совпадают с положительным направлением осей *Ox,Oy,Oz*. Если даны точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на координатные оси находятся по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1. \qquad (2)$$

Тогда

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k} \qquad (3)$$

Подставив в (3) координаты точек *A* и *B*, получим вектор $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3-2) \cdot \vec{i} + (-1-1) \cdot \vec{j} + (2-0) \cdot \vec{k} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Аналогично, получим:

$$\overrightarrow{AC} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}; \qquad \overrightarrow{AD} = -2\vec{i} + 4\vec{k}.$$

Если вектор $\vec{a}$ задан формулой (1), то его модуль вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (4)$$

Применяя (4), получим модули найденных векторов:

$$|\overrightarrow{AB}| = 3, \ |\overrightarrow{AC}| = 15, \qquad = 2\sqrt{5}.$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|$$

2) Косинус угла между двумя векторами равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение их модулей.

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} \qquad (5)$$

Находим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 1 \cdot 11 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 10 = 27 .$$

Модули этих векторов уже найдены $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 15$.

Следовательно,

$$\cos A = \frac{27}{3 \cdot 15} = \frac{3}{5} = 0{,}6 ; \qquad A = 53^0 8' .$$

3) Площадь грани ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Обозначим векторное произведение вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\vec{P}$. Тогда, как известно, модуль вектора выражает собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а площадь грани ABC будет равна половине модуля вектора $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -24\vec{i} + 12\vec{j} + 24\vec{k} ;$$

$$\left|\vec{P}\right| = 36 ; \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18 \quad \text{кв.ед.}$$

4) Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения. Вычислим смешанное произведение $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$\left(\overrightarrow{\grave{A}\hat{A}} \times \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 144 .$$

Следовательно, объем параллелепипеда равен 144 куб.ед., объем заданной пирамиды *ABCD* равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда ,т.е.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 144 = 24 \text{ куб.ед.}$$

<u>Тема:4</u> Аналитическая геометрия в пространстве (задачи 41-50). Перед выполнением задач необходимо изучить раздел 7 ДЕ-2 (аналитическая геометрия).

41-50. Даны координаты точек *A, B, C* и *M*.

Найти: 1. уравнение плоскости *Q*, проходящей через точки *A, B*, и *C*;

2.канонические уравнения прямой, проходящей через точку *M* перпендикулярно плоскости *Q*,;

3.точки пересечения полученной прямой с плоскостью *Q*,и с координатными плоскостями *xOy, xOz, yOz*;

41	A(3;-1;5)	B(7;1;1)	C(4;-2;1)	M(5;1;0)
42	A(-1;2;3)	B(3;4;-1)	C(4;-2;1)	M(7;0;1)
43	A(2;-3;7)	B(6;-1;3)	C(3;-4;3)	M(-2;3;-2)
44	A(0;-2;6)	B(4;0;2)	C(1;-3;2)	M(-1;5;6)
45	A(-3;1;2)	B(1;3;-2)	C(-2;0;-2)	M(3;4;0)
46	A(-2;3;1)	B(2;5;-3)	C(-1;2;-3)	M(-3;2;-3)
47	A(-4;0;8)	B(0;2;4)	C(-3;-1;4)	M(7;1;2)
48	A(1;4;0)	B(5;6;-4)	C(2;3;-4)	M(1;4;1)
49	A(4;-4;9)	B(8;-2;5)	C(5;-5;5)	M(4;2;-1)
50	A(5;5;4)	B(9;7;0)	C(6;4;0)	M(1;3;6)

Решение типового примера

Даны координаты точек *A(0;-2;-1), B(2;4;-2), C(3;2;0)* и *M(-11;8;10).*

Найти: 1)уравнение плоскости *Q*, проходящей через точки *A, B*, и *C*;

2) канонические уравнения прямой, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости Q,; 3) точки пересечения полученной прямой с плоскостью Q,и с координатными плоскостями xOy, xOz, yOz;

Решение.

1) Уравнение плоскости. Проходящей через три данные точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Подставив в (1) координаты точек *A, B* и *C*, получим:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z+1 \\ 2-0 & 4+2 & -2+1 \\ 3-0 & 2+2 & 0+1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$10x-5(y+2)-10(z+1)=0.$$

Сократив на 5, получим уравнение искомой плоскости Q:

$$2x-y-2z-4=0 \;\; (Q). \qquad (2)$$

2) Канонические уравнения прямой в пространстве имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (3)$$

где x_0, y_0, z_0 - координаты точки, через которую проходит прямая (3), а *m,n,p*- направляющие коэффициенты этой прямой. По условию прямая проходит через точку *M(-11;8;10)* и перпендикулярна плоскости Q. Следовательно, подставив в (3) координаты точки M и заменив соответственно числа *m,n,p* числами 2;-1;-2 (коэффициенты общего уравнения плоскости (2)), получим

$$\frac{x+11}{}=\frac{y-8}{}=\frac{z-10}{}. \qquad (4)$$

$$2 \qquad -1 \qquad -2$$

3) Чтобы найти точки пересечения прямой (4) с плоскостью (2), запишем сначала уравнения прямой (4) в параметрическом виде. Пусть

$\frac{x+11}{2}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-10}{-2}=t$, где *t*- некоторый параметр. Тогда уравнения прямой можно записать так:

$$x=2t-11;\ \ y=-t+8;\ \ z=-2t+10. \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получим значение параметра *t*:

$$2(2t-11)-(-t+8)-2(-2t+10)-4=0 \Rightarrow 4t-22+t-8+4t-20-4=0 \Rightarrow t=6$$

Подставив в (5) *t=6*, находим координаты точки *P* пересечения прямой (4) с плоскостью (2):

$$x=1;\quad y=2;\quad z=-2;\quad P(-1;2;-2).$$

Пусть P_1 - точка пересечения прямой (4) с координатной плоскостью *xOy;* уравнение этой плоскости *z=0*. При *z=0* из (5) получаем

$$t=5;\qquad x=-1;\qquad y=3;\qquad P_1(-1;3;0).$$

Пусть P_2 - точка пересечения прямой (4) с плоскостью *xOz*; уравнение этой плоскости *y=0*. При *y=0* из (5) получаем

$$t=8;\qquad x=5;\qquad z=-6;\qquad P_2(5;0;-6).$$

Пусть P_3 - точка пересечения прямой (4) с плоскостью *yOz*.
Уравнение этой плоскости *x=0*. При *x=0* из (5) получаем

$$t=5{,}5;\qquad y=2{,}5;\qquad z=-1;\qquad P_3(0;2{,}5;-1).$$

<u>Тема:5</u> Предел функции. Непрерывность функции, точки разрыва. (задачи 51-60,61-70). Перед выполнением задач необходимо изучить раздел 12 ДЕ-4(математический анализ) рабочей программы.

51-60. Найти указанные пределы.

$2x^2+x-1$

51. 1) $\lim\limits_{x\to x_o} x^2-3x-4$, а) $x_0=1$, б) $x_0=-1$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 4x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x}\right)^{x-3}$

52. 1) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{x^2-3x+2}{-3x^2-x+4}$, а) $x_0=-2$, б) $x_0=1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x\cdot\cos 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{7x}\right)^{x+5}$

53. 1) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2+3x+2}$, а) $x_0=1$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot tg3x}{\sin 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{7x}\right)^{2x-1}$

54. 1) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{x^2-3x+2}{-3x^2-x+14}$, а) $x_0=-2$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot tg3x}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{8x}\right)^{3x+5}$

55. 1) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{x^2+5x+4}{2x^2-3x+5}$, а) $x_0=1$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{tg2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x-4}$

56. 1) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{4x^2-5x+1}{-x^2+3x-2}$, а) $x_0=2$;б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\cos 5x}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{4x}\right)^{2x+3}$

57. 1) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{x^2+5x+6}{3x^2-x-14}$, а) $x_0=2$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot tg4x}{\sin 6x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{9}{5x}\right)^{x-5}$

58. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-7x+6}{-x^2-x+6}$, а) $x_0=-1$, б) $x_0=2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x}{tg10x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{10x}\right)^{x+1}$

59. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-6x-7}{3x^2+x-2}$, а) $x_0=-2$, б) $x_0=-1$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 9x}{x\cdot tg5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{5x}\right)^{3x+2}$

60. 1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2+x-6}$, а) $x_0=-1$, б) $x_0=-2$, в) $x_0=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cdot\cos 7x}{\sin 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{9x}\right)^{x-2}$

Решение типового примера

Найти указанные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}$, а) $x_0=3$, б) $x_0=\infty$;

Решение.

а) При подстановке предельного значения *x=3* получается неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

$$\frac{2x^2-3x-9}{} = \left[\frac{0}{}\right.$$

$$\lim_{x\to 3} \quad x^2 - x - 6 \qquad \lfloor 0 \rfloor$$

Для избавления от этого типа неопределенности в нашем случае представим квадратные трехчлены числителя и знаменателя в видепроизведения линейных множителей, воспользовавшись известной формулой:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right),$$

где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=0$.

Для числителя имеем: $2x^2-3x-9=0$,

найдем дискриминант :

$$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-9)=81,$$

по формуле корней получим:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{81}}{2\cdot 2}=\frac{3-9}{4}=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{81}}{2\cdot 2}=\frac{3+9}{4}=3$$

Следовательно , $2x^2-3x-9=2(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

Аналогично для знаменателя: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$.

Теперь условие задачи можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2\cdot 3+3}{3+2}=\frac{9}{5}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$

Здесь сталкиваемся с неопределенностью $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, избавиться от которой можно вынесением за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{m}-\frac{6}{}\right)}=\frac{\left(2-\frac{3}{\infty}-\frac{9}{\infty}\right)}{\left(1-\frac{1}{\infty}-\frac{6}{}\right)}=\frac{2-0-0}{1-0-0}=2.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}$

x^2 ∞ x

$\frac{x \cdot \sin 2x}{tg^2 4x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{tg^2 4x}=\frac{0}{0}$$

В данном случае для освобождения от неопределенности будем использовать первый замечательный предел и одно из его очевидных следствий:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1;\quad \lim_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=1.$$

Решение примера будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{tg^2 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin 2x}{tg\ \ 4x\cdot tg4x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{4x}{tg4x}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{4x}{tg4x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x+1}$

Решение.

Здесь сталкиваемся с неопределенностью $\left[1^\infty\right]$, преобразуем ко второму замечательному пределу $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$. Для этого положим $\dfrac{3}{x}=\dfrac{1}{\alpha}$, где

$\alpha\to\infty$при $x\to\infty$, тогда $x=3\alpha$.

Выразив основание и показатель степени через α, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x+1}=\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{15\alpha+1}=\left[\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{15}\cdot\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{1}=e^{15}\cdot 1=e^{15}$$

61-65. Даны функция y=f(x) и значения аргумента x_1 и x_2.

Требуется:

1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной при данных значениях аргумента;

2) найти односторонние пределы в точках разрыва;

3) построить график данной функции.

61.61. $y = \dfrac{4x}{x+1}$; $x_1 = -1, \quad x_2 = 3$

62.62. $y = \dfrac{x}{x-4}$; $x_1 = 4, \quad x_2 = 2$

63.6 $y = \dfrac{2x}{x-3};\quad x_1 = 3,\ \ x_2 = -2$ 64. $y = \dfrac{2x}{x+3};\quad x_1 = -3,\ \ x_2 = 5$

3

· $y = \dfrac{3x}{x-2};\quad x_1 = 3,\ \ x_2 = 2$

65.

66-70. Функция *y* задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента *x*.

Требуется:

1) найти точку разрыва;

2) найти односторонние пределы и скачок функции в точках разрыва;

3) сделать чертеж.

66. $y = \begin{cases} x^2 - 1 & при \quad x < 0 \\ 2x + 1 & при \quad x \ge 0 \end{cases}$

69. $y = \begin{cases} x + 4 & при \quad x < -3 \\ 5 - x^2 & при \quad x \ge -3 \end{cases}$

67. $y = \begin{cases} x^2 + 1 & при \quad x \le 2 \\ 4 - x & при \quad x > 2 \end{cases}$

70. $y = \begin{cases} x + 6 & при \quad x < -2 \\ x^2 - 1 & при \quad x \ge -2 \end{cases}$

68. $y = \begin{cases} 2x^2 & при \quad x < 1 \\ x + 1 & при \quad x \ge 1 \end{cases}$

Решение типового примера

а) Дана функция $y = \dfrac{3x}{x+2}$; и значения аргумента $x_1 = -2,\ \ x_2 = 3$.

Требуется:

1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной при данных значениях аргумента;

2) найти односторонние пределы в точках разрыва;

3) построить график данной функции.

Решение.

Если находится предел функции *y=f(x)* при условии, что аргумент *x*, стремится к предельному значению a, может принимать только такие значения, которые меньше a, то этот предел, если он существует, называется левосторонним пределом данной функций в точке $x=a$ и обозначается

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} y = \lim_{x\to a-0} y.$$

Аналогично, если аргумент x, стремится к предельному значению a, может принимать только такие значения, которые больше a, то этот предел, если он существует, называется правосторонним пределом данной функций в точке $x=a$ и обозначается

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} y = \lim_{x\to a+0} y.$$

Функция $y=f(x)$ непрерывна при $x=a$, если выполняются следующие условия:

1) функция определена не только в точке a, но и в некотором интервале, содержащем эту точку;

2) функция имеет при $x \to a$ конечные и равные между собой односторонние пределы;

3) односторонние пределы при $x \to a$ совпадают со значением функции в точке a. т.е.

$$\lim_{x\to a-0} y = \lim_{x\to a+0} y = f(a).$$

Если для данной функции $y=f(x)$ в данной точке $x=a$ хотя бы одно из перечисленных трех условий не выполняется, то функция называется разрывной в точке $x=a$.

Разрыв функции в точке $x=a$ называется разрывом первого рода, если односторонние пределы слева и справа существуют, но не равны между собой. Если же хотя бы один из односторонних пределов не существует в этой точке, то точка $x=a$ называется разрывом второго рода.

При x=-2 данная функция не существует: в этой точке функция терпит разрыв. Определим односторонние пределы функции при $x \to -2$ слева и справа

$$\lim_{x \to -2-0} y = \lim_{x \to -2-0} \frac{3x}{x+2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to -2+0} y = \lim_{x \to -2+0} \frac{3x}{x+2} = -\infty,$$

Таким образом, при x=-2 данная функция имеет разрыв второго рода, т.к. односторонние пределы в этой точке не существуют.

При x=3 данная функция непрерывна, так как выполняются все три условия непрерывности функции.

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{3x}{x+2} = \lim_{x \to 3+0} \frac{3x}{x+2} = \frac{9}{5}.$$

Данная функция является дробно-линейной. Известно, что графикомдробно-линейной функции служит равносторонняя гипербола. Асимптоты, которой параллельны осям координат. Для построения составим таблицу

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	9/2	5	6	9	$\pm\infty$	-3	0	1	3/2	9/5	2	15/7	9/4

График функции показан на рисунке 3

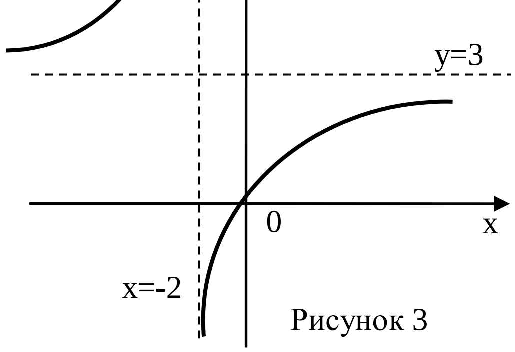


Рисунок 3

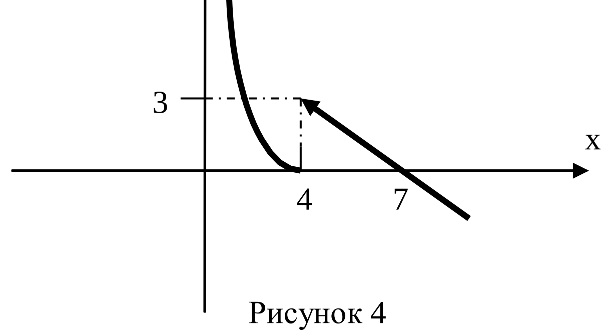


Рисунок 4

б) Функция: $y = \begin{cases} (x-4)^2 & при \quad x \le 4 \\ 7 - x & при \quad x > 4 \end{cases}$ задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента *x*.

Требуется:

1) найти точку разрыва;
2) найти односторонние пределы и скачок функции в точках разрыва;

сделать чертеж.

Решение.

Данная функция определена и непрерывна в интервалах $(-\infty;4] \cup (4;+\infty)$. При *x*=4 меняется аналитическое выражение функции. И только в этой точке функция может иметь разрыв. Определим односторонние пределы в точке *x*=4:

$$\lim_{x\to 4-0} y = \lim_{\substack{x\to 4 \\ x<4}} (x-4)^2 = 0; \qquad \lim_{x\to 4+0} y = \lim_{\substack{x\to 4+0 \\ x>4}} (7-x) = 3$$

Т.к. односторонние пределы не равны между собой, то в этой точке функция имеет разрыв первого рода.

Скачком функции в точке разрыва называется абсолютная величина разности между ее правым и левым предельными значениями. Следовательно, в точке *x*=4 скачок функции $\Delta = |3-0| = 3$.

График функции показан на рисунке 4.

<u>Тема:6</u> Дифференцирование функции одной переменной. Применение производной к исследованию функции (задачи 71-80,81-90). Перед выполнением задач необходимо изучить раздел 13 ДЕ-4(математический анализ).

71-80. Найти производные функции:

71. 1) $y = \sqrt[5]{x} \cdot \ln x \cdot \sin x$ 3) $y = \dfrac{x^4}{e^{2x+1}}$ 5) $x^2 y^2 - 2xy + 1 = 0$

2) $y=\left(\cos^2 3x+7\right)^4$ 4) $y=x^{3x}$

72. 1) $y=2^{x}\cdot\sqrt{x}$ 3) $y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^5}$ 5) $x^3+2xy=y^3-1$

2) $y=\ln\cos^3 x$ 4) $y=x^{x^2}$

73. 1) $y=\dfrac{tgx}{\sqrt[3]{x}+7x}$ 3) $y=4^{3x}\cdot\cos 2x$ 5) $x^2y-4x+2y=7$

2) $y=\ln arctgx^3$ 4) $y=x^{4x}$

74. 1) $y=\dfrac{\cos x}{x^5}$ 3) $y=3^x\cdot arctg8x$ 5) $2x^3-4y^3x=5y$

2) $y=\sqrt{\ln x^2+1}$ 4) $y=x^{\sin x}$

75. 1) $y=\dfrac{1}{x^3}\cdot 3^{x}$ 3) $y=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x+5}}$ 5) $2x^3y^3-3x+5y=1$

2) $y=\sin\ln x^4$ 4) $y=(\cos x)^x$

76. 1) $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$ 3) $y=\cos e^{2x}$ 5) $y^2=xy-3x^3$

2) $y=\dfrac{\arcsin 7x}{x^3+1}$ 4) $y=x^{2x}$

77. 1) $y=\dfrac{9x+1}{3+x^9}$ 3) $y=\sqrt[5]{tg5x+3}$ 5) $xy^2-3x^2=4y^2+6$

2) $y=2^{8x}\cdot ctgx$ 4) $y=(\sin x)^x$

78. 1) $y=\dfrac{tgx}{x^5+7x}$ 3) $y=4^{3x}\cdot\cos 2x$ 5) $x^2y-4x+2y=7$

2) $y=\ln^2 arctgx$ 4) $y=x^{4x}$

79. 1) $y=\sqrt[5]{x}\cdot\log_3 x$ 3) $y=\dfrac{\sqrt{1-4x^2}}{ctg7x}$ 5) $x^3y-8xy+y^2=8$

2) $y=\arcsin\ln 2x$ 4) $y=(\cos x)^{3x}$

80. 1) $y=5^x\cdot\sin x$ 3) $y=\dfrac{ctg\,2x}{\sqrt[3]{x}}$ 5) $x^3y-8xy=y^2+3$

2) $y = e^{\arccos 3x} + \frac{1}{x^2}$ 4) $y = x^{\cos x}$

При решении задач 71-80 будем использовать таблицу 1 - производных основных элементарных функции и правила дифференцирования суммы, разности, произведения, дроби и теорему о производной сложной функции:

$$1.\ [u \pm v]' = u' \pm v';$$

$$2.\ [u \cdot v]' = u'v + uv';$$

$$3.\ \left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

4.если задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то есть $y = f(\varphi(x))$;

если каждая из функций дифференцируема по своему аргументу, то

$$y' = y'_u \cdot u'_x.$$

Таблица 1.

№п/п	функция	производная
1	$y=const$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
4	$y=\ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
5	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
6	$y = e^x$	$y' = e^x$
7	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
8	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
9	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

11	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
14	$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Решение типового примера

Найти производные следующих функций:

а) $y = \left(\sqrt[3]{x} + 2\right) \cdot \sin x$.

Решение.

Воспользуемся правилом дифференцирования произведения и формулами производной степенной и тригонометрической функции:

$$[u \cdot v]' = u'v + uv'; \ \left(x^n\right)' = nx^{n-1}; \ (\sin x)' = \cos x, \text{ а также } (const)' = 0.$$

Преобразуем $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, получим:

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}} + 2\right)' \cdot \sin x + \left(\sqrt[3]{x} + 2\right) \cdot (\sin x)' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sin x + \left(\sqrt[3]{x} + 2\right) \cdot \cos x =$$

$$= \frac{\sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \left(\sqrt[3]{x} + 2\right) \cdot \cos x$$

$$y' = \frac{\sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} + \left(\sqrt[3]{x} + 2\right) \cdot \cos x.$$

б) $y = \ln^2\left(2x^4 - 5\right)$

Решение.

Имеем сложную функцию $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Тогда $y' = y'_u \cdot u'_x$, Воспользуемся производной сложных функций:

$$u^n = nu^{n-1} \cdot u'; \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Производная заданной функции:

$$y' = 2\ln\left(2x^4 - 5\right)\cdot\left(\ln\left(2x^4 - 5\right)\right)' = 2\ln\left(2x^4 - 5\right)\cdot\frac{\left(2x^4 - 5\right)'}{2x^4 - 5} = 2\ln\left(2x^4 - 5\right)\cdot\frac{8x^3}{2x^4 - 5}$$

$$y' = \frac{16x^3 \cdot \ln\left(2x^4 - 5\right)}{2x^4 - 5}.$$

в) $y = \dfrac{e^{\cos x}}{tgx}$

Решение.

Воспользуемся правилом дифференцирования частного функций и производной сложной функций:

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \qquad \left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$$

$$y' = \frac{e^{\cos x}\left(\cos x\right)' \cdot tgx - e^{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{(tgx)^2} = \frac{-e^{\cos x} \cdot \sin x \cdot tgx - e^{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}}{(tgx)^2}$$

$$y' = \frac{-e^{\cos x}(\sin x \cdot tgx + \dfrac{1}{\cos^2 x})}{(tgx)^2}.$$

г) $y^2x + 4y + 3x = 6$

Решение.

В данном случае зависимость между аргументом x и y задана уравнением, которое не разрешено относительно функции y. Чтобы найти производную y' ,следует дифференцировать по x обе части заданного уравнения, считая при этом y функцией от x, а затем полученное уравнение решить относительно искомой производной y'. Имеем;

$$2y \cdot y' \cdot x + y^2 + 4y' + 3 = 0$$

Из полученного равенства, связывающего x, y и y', выразим производную y':

$$2y \cdot y' \cdot x + 4y' = -y^2 - 3$$

$$y' = -\frac{y^2+3}{2xy+4}.$$

д) $y = \sqrt[x^2]{\sin x}$

Решение.

Предварительно прологарифмируем по основанию *e* обе части равенства:

$$\ln y = \ln(\sqrt[x^2]{\sin x})$$

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x^2}\ln(\sin x)$$

Теперь дифференцируем обе части равенства, считая *lny* сложной функцией от переменной *x*, в правой части равенства воспользуемся правилом дифференцирования производной функций: $[u \cdot v]' = u'v + uv'$, получим:

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' \cdot \ln\sin x + \frac{1}{x^2}(\ln\sin x)'$$

$$\frac{1}{y}y' = -\frac{2}{x^3} \cdot \ln\sin x + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

Умножая обе части последнего равенства на *y* и подставляя $\sqrt[x^2]{\sin x}$ вместо *y*, получаем:

$$y' = \left(\frac{x \cdot ctgx - 2\ln\sin x}{x^3}\right) \cdot \sqrt[x^2]{\sin x}.$$

81-90. Исследовать заданные функции методами дифференциального исчисления. Начертить их графики. Исследование функций и построение графиков проводить по следующей схеме:

1. *найти область определения функции D(y);*
2. *исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в точках разрыва;*
3. *исследовать функцию на четность и нечетность.*

4. найти точки экстремума функции и определить интервалы ее монотонности;

5. найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика;

6. найти асимптоты графика функции;

7. построить график, используя результаты исследований;

81. а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$; б) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

82. а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$; б) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

83. а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$; б) $y = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$

84. а) $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$; б) $y = \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$

85. а) $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$; б) $y = \dfrac{x^2 + 9}{x + 4}$

86. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$; б) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$

87. а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8$; б) $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

88. а) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7$; б) $y = \dfrac{x^2 + 5}{x + 2}$

89. а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32$; б) $y = \dfrac{x^2 - 5}{x + 2}$

90. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20$; б) $y = \dfrac{x^2 - 15}{x + 4}$

Решение типового примера

Исследовать функции по схеме, указанной в условии задачи.

а) $y = \dfrac{1}{5}\left(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21\right)$, б) $y = \dfrac{x^2 + 20}{x - 4}$.

Решение.

а) $y = \frac{1}{5}\left(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21\right)$

1.Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента *x,* то есть *D(y):* $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Функция непрерывна на всей числовой прямой, нет точек разрыва, следовательно, нет вертикальных асимптот.

*3.*При исследовании на четность, нечетность найдем *y(-x).*

$y(-x) = \frac{1}{5}\left(-2x^3 + 3x^2 + 36x - 21\right)$ или $y(-x) = \frac{1}{5}\left(2x^3 + 3x^2 + 36x - 21\right)$

Получили, что: $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$

Следовательно, функция ни четная, ни нечетная – функция общего положения.

4.Находим интервалы возрастания, убывания и экстремум функции, для этого:

а) найдем производную функции

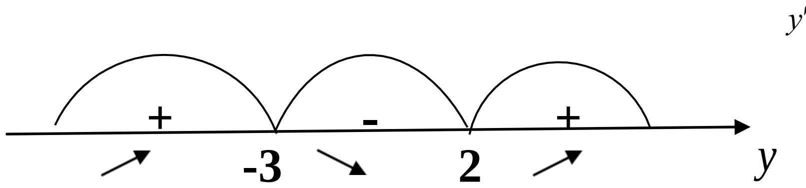
$$y' = \left[\frac{1}{5}\left(2x^3 + 3x^2 - 36x - 21\right)\right]' = \frac{1}{5}\left[6x^2 + 6x - 36\right] = \frac{6}{5}\left(x^2 + x - 6\right)$$

б) Приравняем производную к нулю, решим уравнение $y' = 0$ и найдем критические точки I рода

$$\frac{6}{5}\left(x^2 + x - 6\right) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3; \quad x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{matrix}\right\}$$ -критические точки.

в) Критическими точками разобьем область определения на интервалы и определим знак производной в каждом из интервалов.



Если, $x \in (-\infty;-3)$, например, x=-4, то $y'(-4) = \frac{6}{5}(16-4-6) = \frac{36}{5} \rangle 0$.

Если, $x \in (-3;2)$, например, x=0, то $y'(0) = -\frac{36}{5} \langle 0$.

Если, $x \in (+\infty;2)$, например x=3, то $y'(3) = \frac{6}{5}(9+3-6) = \frac{36}{5} \rangle 0$.

При $x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$ функция возрастает, отмечаем это стрелкой ↗, при $x \in (-3;2)$ функция убывает ↘.

г) Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак с (+) на (-), то в этой точке функция имеет максимум (max), если знак меняется с (-) на (+), то в точке функция имеет минимум (min).

В нашем случае x=-3 – абсцисса точки max; x=2 – абсцисса точки min.

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{1}{5}\left[2\cdot(-27) + 3\cdot 9 + 108 - 21\right] = \frac{1}{5}\cdot 60 = 12$$

$$y_{\min} = y(2) = \frac{1}{5}\left[2\cdot 8 + 3\cdot 4 - 72 - 21\right] = \frac{1}{5}(-65) = -13$$

Вычисляем значение функции в точках экстремума

Для построения графика укажем *A(-3;12)*- точка *max* ; *B(2;-13)*- точка *min.*

5. Находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

$$y' = (y')' = \left[\frac{6}{5}(x^2 + x - 6)\right]' = \frac{6}{5}(2x+1)$$

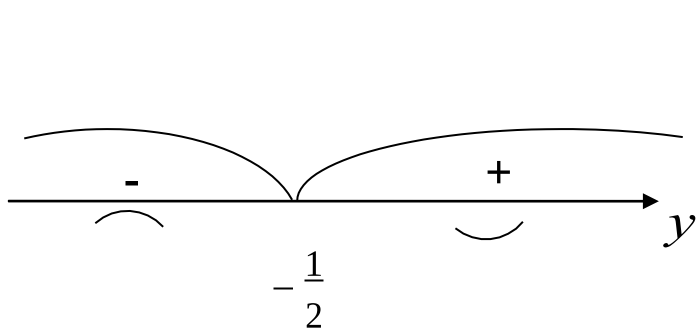
а) найдем производную второго порядка.

б) приравняем вторую производную к нулю, решим уравнение $y' = 0$

$$\frac{6}{5}(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

и найдем критические точки II рода.

в) область определения разобьем найденной точкой на интервалы и определим знак второй производной в каждом интервале



Расставляя знаки второй производной по интервалам, получаем, что в интервале $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, график функции выпуклый, в интервале $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ график функции вогнутый.

г) если при переходе через критическую точку II рода, y' меняет знак, то в этой точке имеем перегиб, в нашем случае $x=-\frac{1}{2}$ - абсцисса точки перегиба.

Вычислим ординату точки перегиба.

$$y_{перегиб}=y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}\left(2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+36\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-21\right)=\frac{1}{2}$$

C $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ - точка *перегиба.*

6. Выясним наличие наклонных асимптот у графика данной функции.

Уравнение асимптоты ищем в виде

y=*k x*+*b*, где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$; $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$.

Имеем $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{5}\left(2x^3+3x^2-36x-21\right)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{5}\left[2x^2+3x-36-\frac{21}{x}\right]=\infty$

Следовательно, наклонных асимптот график не имеет.

Можно найти точку пересечения с осью OY, $x=0 \Rightarrow y=-\frac{21}{5}=-4{,}2 \Rightarrow D(0;-4{,}2)$.

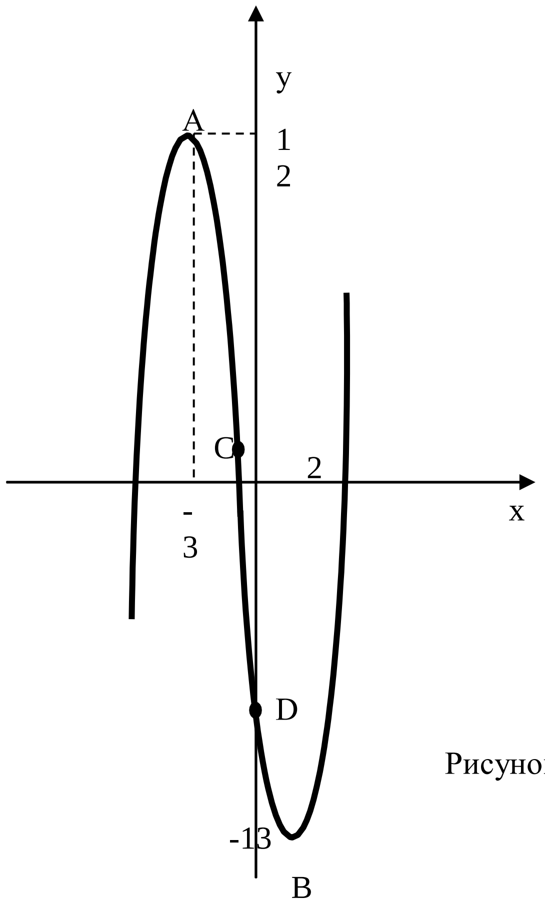


Рисунок 5

б) $y = \frac{x^2+20}{x-4}$**.**

*1.*Областью определения данной : *D(y):* $x \in (-\infty;4) \cup (4;+\infty)$**.**

2. Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки *x=4.* Вычислим ее односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x\to4-0} f(x) = \lim_{x\to4-0}\frac{x^2+20}{x-4} = -\infty; \qquad \lim_{x\to4+0} f(x) = \lim_{x\to4+0}\frac{x^2+20}{x-4} = +\infty.$$

Таким образом, точка *x=4* является для заданной функции точкой разрыва второго рода, а прямая *x=4* – вертикальной асимптотой графика.

*3.*При исследовании на четность, нечетность найдем *y(-x).*

$$y(-x) = \frac{(-x)^2+20}{-x-4} = \frac{x^2+20}{-x-4} \neq y(x) \text{ или } y(-x) = -\frac{x^2+20}{x+4} \neq -y(x)$$

Получили, что: $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$.

Следовательно, функция ни четная, ни нечетная – функция общего положения.

4.Находим интервалы возрастания, убывания и экстремум функции, для этого:

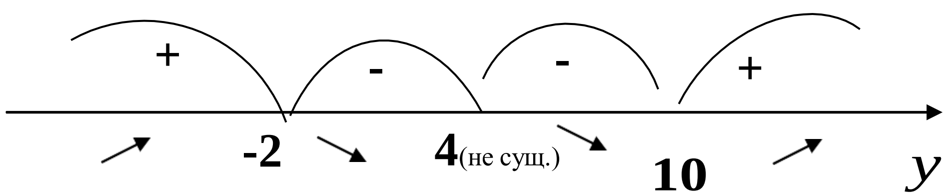
а) найдем производную функции

$$y' = \frac{2x(x-4)-\left(x^2+20\right)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}.$$

б) Приравняем производную к нулю, решим уравнение $y'=0$ и найдем критические точки I рода

$$\frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2} = 0 \Rightarrow x^2-8x-20=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1=-2 \\ x_2=10 \end{matrix}\right\}$$ -критические точки.

в) Критическими точками и точкой *x=4,* в которой функция не существует, разобьем область определения на интервалы и определим знак производной в каждом из интервалов.



Рассматривая знаки производной по интервалам, получаем, что

при $x \in (-\infty;-2) \cup (10;+\infty)$ функция возрастает,

при $x \in (-2;4) \cup (4;10)$ функция убывает .

г) Получили *x=-2* – абсцисса точки max

x=10 – абсцисса точки min.

Вычисляем значение функции в точках экстремума:

$$y_{\max} = y(-2) = -4 \qquad y_{\min} = y(10) = 20$$

Для построения графика укажем *A(-2;-4*)- точка *max*, *B(10;20*)- точка *min.*

5. Находим интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

а) найдем производную второго порядка.

$$y' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - 2(x-4)\left(x^2-8x-20\right)}{(x-4)^4} =$$

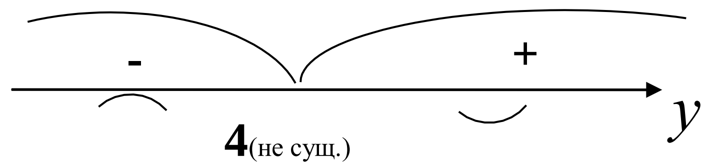
$$= \frac{2(x-4)\left[(x-4)-\left(x^2-8x-20\right)\right]}{(x-4)^4} = \frac{36}{(x-4)^3}$$

б) приравняем вторую производную к нулю, решим уравнение $y' = 0$ и найдем критические точки II рода.

Так как, $y' \neq 0$, то график функции точек перегиба не имеет.

Остается выяснить вопрос об интервалах вогнутости.

в) область определения разобьем точкой разрыва $x=4$ на интервалы и определим знак второй



производной в каждом интервале. Расставляя знаки второй производной по интервалам, получаем, что в интервале $(-\infty;4)$, график функции выпуклый, в интервале $(4;+\infty)$ график функции вогнутый.

6. Выясним наличие наклонных асимптот у графика данной функции. Уравнение асимптоты ищем в виде

$y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $\qquad b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$.

Имеем $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+20}{x^2-4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{20}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+20}{x-4}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+20}{x-4}=4.$$

Таким образом, прямая $y=x+4$ – наклонная асимптота графика. График на рисунке 6

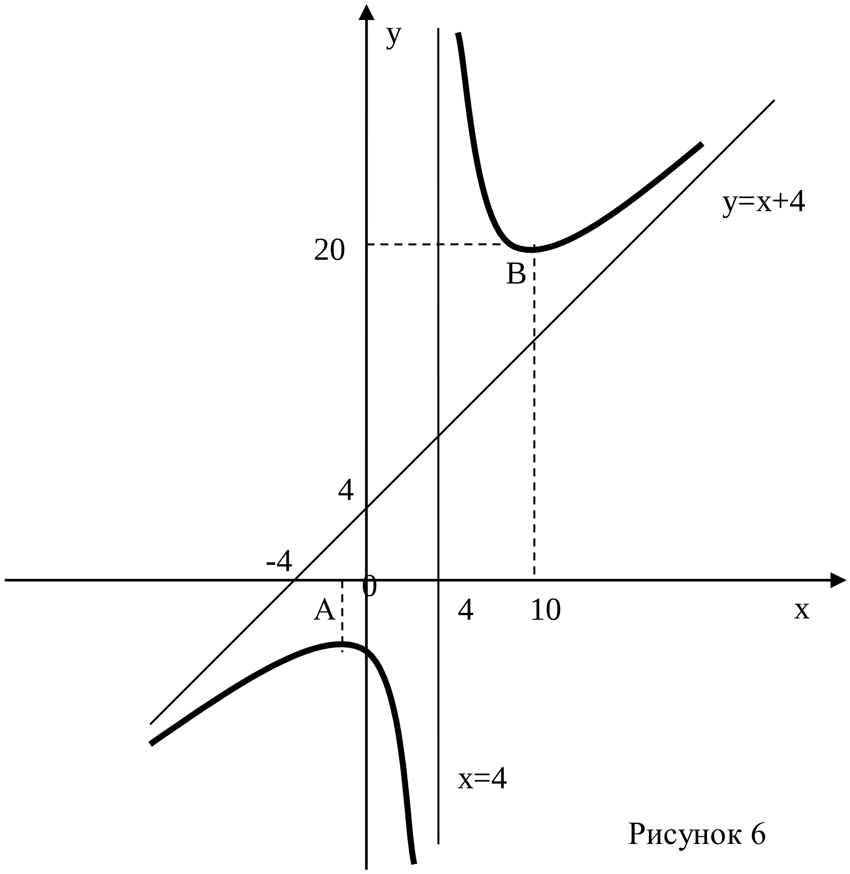


Рисунок 6

Тема:7 Неопределенный интеграл (задачи 91-100). Перед выполнением задач необходимо изучить раздел 14 ДЕ-4 (математический анализ).

91-100. Найти неопределенные интегралы.

91. а) $\int \frac{3x^2+8x+1}{\sqrt{x}}dx$ в) $\int x^3 \ln x dx$

б) $\int \frac{x^2 dx}{5x^3+1}$ г) $\int \frac{x\,dx}{(x+5)(x^2+3)}$

92. а) $\int \frac{2-x^4-\sqrt{x}}{x}dx$ в) $\int x\cos 5x dx$

б) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{4x^2-3}}$ г) $\int \frac{4x-1}{(x^2+2)(x-8)}dx$

93. а) $\int \frac{3x^2 - \sqrt[4]{x}\sin x + 7}{\sqrt[4]{x}}dx$

в) $\int (x-1)e^{2x}dx$

б) $\int \sqrt{5x^4+3}\cdot x^3dx$

г) $\int \frac{3x-1}{x\left(x^2+3\right)}dx$

94. а) $\int \frac{4^x \cdot \sqrt[3]{x} + 2^{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$

в) $\int (2x-1)\sin 7x dx$

б) $\int \frac{xdx}{2x^2+5}$

г) $\int \frac{2x+5}{x^3+2x}dx$

95. а) $\int \frac{2-3x+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$

в) $\int (5x+1)\ln x dx$

б) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{5x^4+3}}$

г) $\int \frac{2x-7}{\left(x^2+1\right)(x-3)}dx$

96. а) $\int \frac{\sqrt{x} - e^x x + 6}{x}dx$

в) $\int \arcsin x dx$

б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

г) $\int \frac{x+2}{(x-1)\left(x^2+3\right)}dx$

97. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\cdot 7^x + x^2 - 1}{\sqrt[3]{x}}dx$

в) $\int (2x-7)e^{-8x}dx$

б) $\int \frac{(\ln x+3)dx}{x}$

г) $\int \frac{x+5}{(x-3)\left(x^2+9\right)}dx$

98. а) $\int \frac{8+x+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3}}dx$

в) $\int \arccos x dx$

б) $\int \sqrt{\ln x}\,dx$

г) $\int \frac{2x-7}{(}\,dx$

x $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\overline{(x^2+4)(x-3)}$

99. а) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 6x^3 \cdot \sin x + 9}{x^3} dx$ $\qquad\qquad$ в) $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$

б) $\int \frac{9^{tgx}\,dx}{\sin^2 x}$

г) $\int \frac{3x+1}{x^3-5x}dx$

100. а) $\int \frac{\sqrt[5]{x}+6\sqrt{x}-8}{\sqrt[5]{x}}dx$

в) $\int 2x\cdot 3^{2x}\,dx$

б) $\int e^{\sin 2x}\cos 2x dx$

г) $\int \frac{x-3}{(x^2+7)(x+2)}dx$

При решении задач 91-100 используйте таблицу 2 - основных неопределенных интегралов.

Таблица 2.

1. $\int dx = x + c$;
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$;
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$;
4. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$;
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$;
6. $\int e^x dx = e^x + c$;
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$;
8. $\int \sin x dx = -\cos x + c$;
9. $\int \cos x dx = \sin x + c$;
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;
12. $\int tgx dx = -\ln \cos x + c$;
13. $\int ctgx dx = \ln \sin x + c$;
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$;
15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + c$;
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+t}} = ln(x + \sqrt{x^2+t}) + C$;
17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + c$;
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$
20. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$
21. $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$
22. $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

18. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$ 23. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\left|ax+b\right| + c$

Решение типового примера

Найти следующие неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\sqrt[4]{x} + 3x - 8}{\sqrt[4]{x}}\,dx$**.**

Решение.

Поделим числитель на знаменатель и после преобразований получим:

$$\int \frac{\sqrt[4]{x} + 3x - 8}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3x}{\sqrt[4]{x}} - \frac{8}{\sqrt[4]{x}} \right) dx = \int \left(1 + 3x^{\frac{3}{4}} - 8x^{-\frac{1}{4}} \right) dx;$$

Воспользуемся основными свойствами неопределенного интеграла и формулами : $\int dx = x + c$**;** $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$**.**

$$\int (1 + 3x^{\frac{3}{4}} - 8x^{-\frac{1}{4}})dx = x + \frac{3x^{\frac{7}{4}}}{7/4} - \frac{8x^{\frac{3}{4}}}{3/4} + C$$

б) $\int \frac{2^{tg\,3x}}{\cos^2 3x}\,dx$**.**

Решение.

Для вычисления данного интеграла используем метод подстановки.

Пусть $tg3x = t$**, тогда** $\frac{3dx}{\cos^2 3x} = dt$ **или** $\frac{dx}{\cos^2 3x} = \frac{1}{3}dt$**,** $dx = \frac{1}{3}\cos^2 3x \cdot dt$

Производим замену переменной:

$$\int \frac{2^{tg\,3x}}{\cos^2 3x}\,dx = \int \frac{2^t}{\cos^2 3x} \cdot \frac{1}{3}\cos^2 3x\,dt = \frac{1}{3}\int 2^t\,dt,$$ **используя формулу**

$\int$ x a^x 1 t 1 2^t $2^{tg\,3x}$

$a \ dx = \frac{}{\ln a} + c$**, получим:** $\frac{}{3}\int 2 \ dt = \frac{}{}\frac{}{3\ln 2} + c = \frac{}{3\ln 2} + c$**.**

в) $\int \frac{\ln x}{x^{6}} dx$**.**

Решение.

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Положим $u = \ln x$**,** $dv = \dfrac{dx}{x^6}$**. Тогда** $du = \dfrac{dx}{x}$**,** $v = \int \dfrac{dx}{x^6} = -\dfrac{1}{5x^5}$ **.**

Следовательно,

$$\int \frac{\ln x}{x^6} dx = -\frac{\ln x}{5x^5} + \int \frac{1}{5x^5} \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{5x^5} + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^6} = -\frac{\ln x}{5x^5} - \frac{1}{25x^5} + c.$$

г) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$**.**

Решение.

Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя:

$$x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{array}{r|l} x^2 & 0 = A + B;\ A = -B \\ x & \quad 1 = -B + C; \\ x^0 & 0 = A - C;\ A = C. \end{array}$$

Отсюда $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$ **. Таким образом,**

$$\int \frac{x}{(x-1)(x^2+1)} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

В первом интеграле используем метод подстановки.

Пусть $x^2 + 1 = t$**, тогда**

$2xdx = dt$ **или** $dx = \dfrac{dt}{2x}$.

Производим замену переменной:

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int \frac{x}{t} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c.$$

Второй и третий интегралы вычисляем по формулам:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\, arctg\, \frac{x}{a} + c; \qquad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c.$$

Окончательно заданный интеграл равен:

$$\int \frac{xdx}{(x-1)\left(x^2+1\right)} = -\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{2}\, arctgx + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c.$$

д) $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

Решение.

Преобразуем, знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла следующим образом:

$$x^2-4x+8 = x^2-4x+4+4 = (x-2)^2+2^2.$$

Тогда после подстановки $t = x-2$ **получаем**

$$\int \frac{3x-1}{(x-2)^2+2^2}dx = \int \frac{3(t+2)-1}{t^2+2^2}dt = \int \frac{3t+5}{t^2+2^2}\,dt = \int \frac{3t}{t^2+2^2}dt + \int \frac{5dt}{t^2+2^2} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+4\right| +$$

$$+\frac{5}{2}\, arctg\, \frac{t}{2} + c = \frac{3}{2}\ln\left|(x-2)^2+4\right| + \frac{5}{2}\, arctg\, \frac{x-2}{2} + c =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right| + \frac{5}{2}\, arctg\, \frac{x-2}{2} + c.$$

При вычислении первого интеграла использовали замену переменной $z = t^2+4$**, тогда** $dz = 2tdt$**,**

откуда $\int \frac{3tdt}{t^2+4} = \frac{3}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+4} = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{3}{2}\ln\left(t^2+4\right) + c$.

<u>Тема:8</u> Определенный интеграл, его вычисление, приложения (задачи 101-

110,111-120,121-130). Перед выполнением задач необходимо изучитьраздел 15 ДЕ-4(математический анализ).

101-110.Вычислить определенные интегралы.

101. $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+4}dx$

102. $\int_1^6 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}+9}dx$

103. $\int_1^5 \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}+16}dx$

104. $\int_1^{20} \frac{\sqrt[3]{x+7}}{\sqrt[3]{x+7}+4}dx$

105. $\int_8^{15} \frac{\sqrt[3]{x-7}}{\sqrt[3]{x-7}+1}dx$

106. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x+4}+3\right)}$

107. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$

108. $\int_1^9 \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+1}dx$

109. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}$

110. $\int_1^{13} \frac{dx}{\sqrt{4x-3}\left(\sqrt{4x-3}+5\right)}$

Решение типового примера

Найти определенный интеграл:

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}dx$$

Решение.

Для вычисления определенного интеграла, если промежуток интегрирования конечен и подынтегральная функция на данном промежутке непрерывна, можно воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Для вычисления данного интеграла воспользуемся методом подстановки в определенном интеграле. Введем новую переменную следующей подстановкой: $\sqrt{x+1} = t$, тогда $x+1 = t^2$ или $dx = 2tdt$.

Определим пределы интегрирования для переменной *t*. При *x=0,* получаем $t_н = 1$, при *x=3* получаем $t_в = 2$.

Выразив подынтегральное выражение, через t и dt и перейдя к новым пределам, получим

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}dx = \int_1^2 \frac{t}{t+2}2tdt = 2\int_1^2 \frac{t^2}{t+2}dt.$$

В подынтегральной дроби выделим целую часть, поделив числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t+2 \\ \underline{-\ t^2+2t} & t-2 \\ -2t & \\ \underline{-\ -2t-4} & \\ 4 & \end{array}$$

Получим $\dfrac{t^2}{t+2} = t-2+\dfrac{4}{t+2}$.

Тогда заданный интеграл примет вид

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+2}dx = 2\int_1^3 tdt - 4\int_1^3 dt + 8\int_1^3 \frac{dt}{t+2} = t^2\Big|_1^3 - 4t\Big|_1^3 + 8\ln|t+2|\Big|_1^3 =$$

$$= (9-12+8\ln 5)-(1-4+8\ln 3) = 8\ln\frac{5}{3}$$

111-120. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями.

111. $y = -x^2 - 2x + 3$ $\qquad$ $y = -2x - 1$

112. $y = x^2 + 6x + 7$ $\qquad$ $y = x + 7$

113. $y = -x^2 - 6x - 5$ $\qquad$ $y = x + 1$

114. $y = \dfrac{x^2}{4} - 2x + 4$ $\qquad$ $y = \dfrac{x}{2} + 4$

115. $y = \dfrac{x^2}{3} + 2x + 3$ $\qquad$ $y = x + 3$

116. $y = x^2 - 4x + 1$ $\quad$ $y = x + 1$

117. $y = -x^2 - 6x + 5$ $\quad$ $y = -x + 5$

118. $y = x^2 - 4x + 4$ $\quad$ $y = x$

119. $y = x^2 - 6x + 5$ $\qquad\qquad\qquad$ $y = -x - 1$

120. $y = \frac{x^2}{3} - 2x + 3$ $\qquad\qquad\qquad$ $y = 2x - 6.$

Решение типового примера.

Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями

$y = \frac{1}{3}x^2;$ $\qquad$ $y = -x + 6$

Решение.

Найдём точки пересечения этих линий и сделаем чертёж, который указан на рисунке 8.

Решим систему:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ y = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ \frac{1}{3}x^2 = -x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x^2 + 3x - 18 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 \\ x_1 = \frac{-3-9}{2} = -6 \\ x_2 = \frac{-3+9}{2} = 3 \end{cases}$$

Точки пересечения линий: *A(-6; 12); B(3;3)*

$y = \frac{1}{3}x^2$ - парабола, ветви вверх, вершина O(0;0), $y = -x + 6$ - прямая линия.

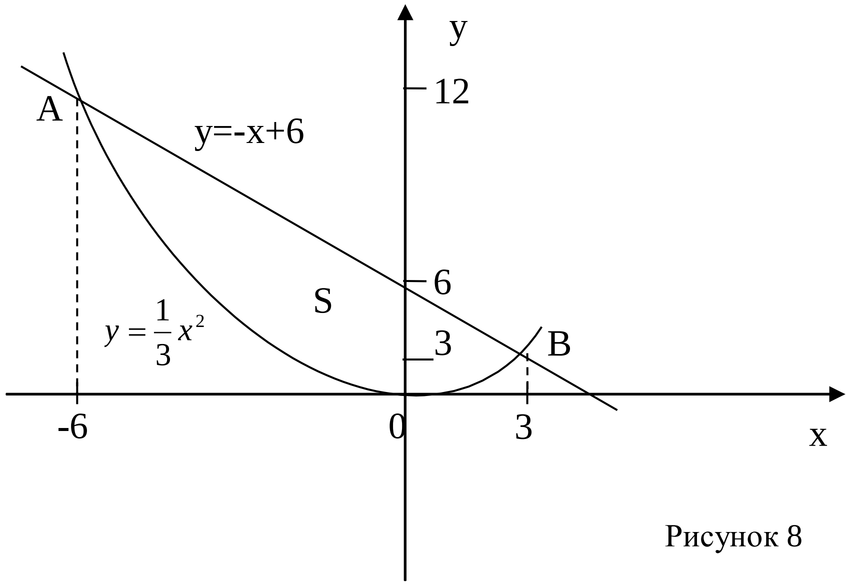


Рисунок 8

Вычисление площади осуществляем по формуле:

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx,$$

$y=f_1(x)$ -кривая ограничивающая фигуру снизу,

$y=f_2(x)$ -кривая ограничивающая фигуру сверху

В нашем случае $f_1(x)=\frac{1}{3}x^2;\quad f_2(x)=-x+6$

$$S=\int_{-6}^{3}\left[(-x+6)-\frac{1}{3}x^2\right]dx=\left[-\frac{x^2}{2}+6x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{-6}^{3}=$$

$$=\left(-\frac{9}{2}+18-\frac{3^3}{3^2}\right)-\left(-\frac{36}{2}-36-\frac{(-6)^3}{9}\right)=$$

$$(-4{,}5+18-3)-(-18-36+24)==11{,}5+30=41{,}5$$

$$S=41{,}5\ (кв.ед.)$$

121-130. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг указанной оси фигуры, ,ограниченной линиями.

121. $y=4-2x$; $y=2x^2$; ось OX.

122. $y=-x+2$; $y=x^2$; ось OY.

123. $y=-x+4$; $y=3x^2$; ось OX.

124. $y=-3x+12$; $y=\frac{1}{3}x^2$; ось OX.

125. $y=-x+3$; $y=\frac{1}{4}x^2$; ось OY.

126. $y=-3x+8$ $y=\frac{1}{2}x^2$ ось OX.

127. $y = -3x + 14 \qquad y = 2x^2;$ ось OX.

128. $y = -x + 6 \qquad y = \frac{1}{3}x^2;$ ось OY.

129. $y = -2x + 5 \qquad y = 3x^2;$ ось OY.

130. $y = -2x + 9 \qquad y = \frac{1}{3}x^2;$ ось OX.

Решение типового примера

Найти объем тела, образованного вокруг оси OX фигуры, расположенной в первом квадранте и ограниченной параболой $y = 8x^2$, прямой $y = -6x + 14$ и осью OX.

Решение.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$V_{OX} = \pi \int_a^b y^2 dx. \tag{1}$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривой $x=w(y)$, осью OY и прямыми $y=c$ и $y=d$, вычисляется по формуле

$$V_{OY} = \pi \int_c^d x^2 dy. \tag{2}$$

Для решения указанной задачи построим чертеж. Найдем абсциссу точки пересечения параболы и прямой в первом квадранте. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 8x^2 \\ y = -6x + 14 \end{cases} \Rightarrow 8x^2 = -6x + 14 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -7/4 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$$

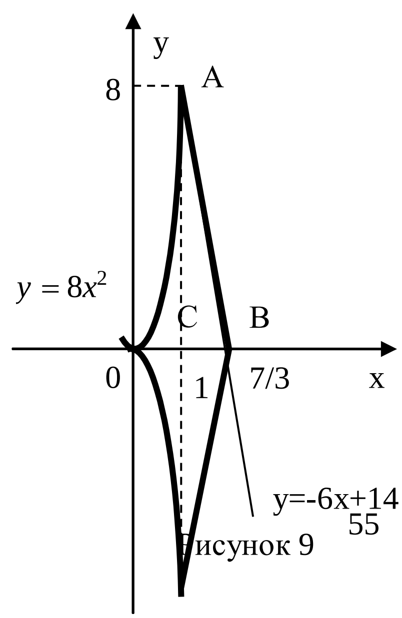


Рисунок 9

Первому квадранту соответствует корень $x_2=1 \Rightarrow y_2=8 \Rightarrow$ *A(1;8)*- точка пересечения прямой и параболы в первом квадранте.

Найдем абсциссу точки пересечения прямой с осью *OX*, решив уравнение *-6x+14=0*, откуда *x=7/3*. Полученное тело вращения указано на рисунке 9.

Воспользуемся формулой (1)

$$V_{OX}=\pi\int_a^b y^2dx.$$

Искомый объем равен сумме двух объемов, образованных вращением криволинейных трапеции: *OAC* при $0\le x\le 1$;*CAB* при $1\le x\le 7/3$ вокруг оси *OX*.

$$V=V_{OAC}+V_{CAB}=\pi\int_0^1\left(8x^2\right)^2dx+\pi\int_1^{7/3}\left(-6x+14\right)^2dx.$$

Для вычисления второго интеграла воспользуемся подстановкой:

$t=-6x+14 \Rightarrow dt=-6dx \Rightarrow dx=-\frac{1}{6}dt \Rightarrow \begin{cases} t_1=8 \\ t_2=0 \end{cases}$ - пределы интегрирования.

$$V=64\pi\int_0^1 x^4dx-\frac{1}{6}\pi\int_8^0 t^2dt=64\pi\left.\left(\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^1-\frac{\pi}{6}\left.\left(\frac{t^3}{3}\right)\right|_8^0=\frac{64\pi}{5}+\frac{256\pi}{9}=\frac{1856\pi}{45}\left(\textit{куб.ед.}\right)$$

<u>Тема:9</u> Несобственные интегралы (задачи 131-140). Перед выполнением задач необходимо изучить раздела 16 ДЕ-4 (математический анализ).

131-140. Вычислить несобственные интегралы.

∞ dx ∞ $\frac{xdx}{}$ -1

131. $\int_0 \frac{}{(x+2)^3}$

132. $\int_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} \, dx$

136. $\int x^2 - 1$

137. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(3x-1)^4}$

133. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

138. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

134. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+3)^4}$

139. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{(x^2+2)^3}$

135. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$

140. $\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$

Решение типового примера.

Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость.

$$\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$$

Решение.

Данный интеграл является интегралом первого типа с бесконечным пределом интегрирования.

За значение интеграла принимается предел, к которому стремиться соответствующий определенный интеграл при стремлении пределов интегрирования к бесконечности:

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx\,; \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx\,; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx$$

. Если указанные пределы конечны, то говорят, что несобственные интеграл сходится. Если же предел бесконечен(не существует), то говорят, что несобственный интеграл расходится.

В заданном интеграле применяем подстановку в определенном интеграле.

Пусть $\ln x = t$, тогда $\frac{dx}{x} = dt$, если *x=3*, то *t=ln3*; $x \to \infty$, то $t \to \infty$, получим:

$$\int^{\infty} \frac{dt}{{}^{2}} = \lim \int^{b} \frac{dt}{{}^{2}} = \lim \left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|^{b} = \lim \left(-\frac{1}{} + \frac{1}{}\right) = \frac{1}{},$$

$$_{\ln 3} t \qquad _{b\to\infty} \; _{\ln 3} t \qquad _{b\to\infty} \Big(\qquad \Big)_{\ln 3} \qquad _{b\to\infty} \Big(\;\; b \quad \ln 3 \Big) \quad \ln 3$$

т.к. при $b \to \infty$ $\Rightarrow \dfrac{1}{b} \to 0$. Интеграл сходится.

<u>Тема:10</u> Дифференциальные уравнения.(задачи 141-160). Перед выполнением задач необходимо изучить разделы 21,22,23 ДЕ-5(дифференциальные уравнения)

141-150. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка.

141. $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$	146. $y' + y \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}$
142. $xy \cdot y' - y^2 - 3x^2 = 0$	147. $xy' - y = x\sqrt{x}$
143. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$	148. $xy \cdot y' = 6x^2 + y^2$
144. $y' + y = e^{-x}$	149. $x^2 y' - y^2 - x^2 = 0$
145. $y' - 5x^4 y = e^{x^5}$	150. $y' = \frac{y}{x} - tg\frac{y}{x}$

Решение типового примера

Найти общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений первого порядка.

а) $y' - yctgx = \frac{1}{\sin x}$.

Решение.

Данное уравнение является линейным уравнением первого порядка, т.е. уравнением вида:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Для решений уравнений такого типа полагают $y = u \cdot v$, где u, v – независимые функции от x, $y' = u'v + uv'$. Подставляем y и y' в данное уравнение в нашем случае будем иметь:

$\sin x$

$u'v + uv' - uv \cdot ctgx = \frac{1}{}$ или $(u' - uctgx) \cdot v + uv' =$

$$\frac{1}{\sin x}$$

Подберем функцию $u=u(x)$ так, чтобы выражение в скобке, обращалось в нуль. Для нахождения функций $u(x)$ и $v(x)$ получим систему:

$$\begin{cases} u'-uctgx=0 \\ uv'=\dfrac{1}{\sin x} \quad (*) \end{cases}$$

Из первого уравнения системы определяем функцию $u(x)$, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'-uctgx=0\Rightarrow \frac{du}{dx}=u\cdot ctgx\Rightarrow \frac{du}{u}=ctgx\cdot dx\Rightarrow \frac{du}{u}=\frac{\cos x}{\sin x}dx\Rightarrow$$

$$\ln u=\ln\sin x\Rightarrow u=\sin x$$

Для определения функции $v(x)$, найденное значение функции $u(x)$ подставляем во второе уравнение системы $(*)$

$$\sin x\cdot v'=\frac{1}{\sin x}\ \Rightarrow\ v'=\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow v=-ctgx+c$$

Записываем общее решение данного уравнения в виде $y=u\cdot v$ или

$$y=\sin x(-ctgx+c); \qquad y=\sin x\left(-\frac{\cos x}{\sin x}+c\right);$$

$y=-\cos x+c\sin x$ - общее решение.

б) $x\cdot\left(y'+2e^{\frac{y}{x}}\right)=y$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на x:

$$\left(y'+2e^{\frac{y}{x}}\right)=\frac{y}{x}.$$

Данное уравнение является однородным, т.к. содержит функции одного и того же измерения относительно переменных x и y.

Применяем подстановку: $\dfrac{y}{x} = t \Rightarrow y = x \cdot t \Rightarrow y' = t + t' \cdot x$, тогда уравнение

примет вид: $t + t' \cdot x + 2e^{t} = t \Rightarrow t' \cdot x + 2e^{t} = 0$.

Получили уравнение с разделяющими переменными относительно x и t .

Разделяем переменные и интегрируем:

$$xdt = -2e^t dx$$

$$-\frac{dt}{e^t} = 2\frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dt}{e_t} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$e^{-t} = 2\ln|x| + \ln|c| \Rightarrow e^{-t} = \ln|x^2 \cdot c|.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x^2 \cdot c|$$ - общий интеграл.

151-160. Даны дифференциальные уравнения второго порядка. Найти: а) общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка; б) частное решение линейного неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

151. а) $2yy' = (y')^2$	б) $y' - 2y' = 2x + 1$ $y(0) = 1, y'(0) = 3$
152. а) $xy' - y' = x^2$	б) $y' - 2y' = -4x$ $y(0) = 1, y'(0) = 4$
153. а) $y' = -\frac{y'}{x}$	б) $y' + y' - 2y = 6x^2$ $y(0) = 2, y'(0) = 1$
154. а) $y^3 y' + 1 = 0$	б) $y' + 2y' + y = e^x$ $y(0) = 0, y'(0) = 2$
155. а) $y' tgx = y' + 1$	б) $y' - 4y' + 5y = 5x$ $y(0) = 2, y'(0) = 1$

Решение типового примера

Решить дифференциальные уравнения второго порядка.

а) $(x^3 + 1) \cdot y' = 3x^2 \cdot y'$

Решение.

Данное дифференциальное уравнение допускает понижение порядка, не содержит явно функцию y.

Положим $y' = p$, тогда $y' = p' = \dfrac{dp}{dx}$ и уравнение примет вид

$$\left(x^3+1\right)\cdot\frac{dp}{dx} = 3x^2 \cdot p$$

Получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, разделим переменные и проинтегрируем обе части

$$\frac{dp}{p} = \frac{3x^2}{x^3+1}dx,$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{3x^2}{x^3+1}dx,$$

$$\ln|p| = \ln\left|x^3+1\right| + \ln\left|c_1\right|,$$

где интеграл, стоящий в правой части решаем подстановкой $t = x^3+1$ и

приводим к табличному $\int\frac{dt}{t} = \ln|t| + c$.

Применяя свойство логарифма, получим

$$\ln|p| = \ln\left|(x^3+1)\cdot c_1\right| \Rightarrow p = c_1\cdot\left(x^3+1\right).$$

Возвращаясь к подстановке, получим:

$$y' = c_1\cdot\left(x^3+1\right) \Rightarrow dy = c_1\cdot\left(x^3+1\right)dx \Rightarrow \int dy = c_1\int\left(x^3+1\right)dx,$$

тогда $y = c_1\cdot\left(\dfrac{x^4}{4} + x + c_2\right)$ - общее решение.

б) $y' \quad 2(y')^2$

$= \quad y - 1$ ———

Решение.

Данное уравнение также допускает понижение порядка, в нем явно отсутствует переменная x.

Положим $y' = p$, тогда $y' = p \cdot \frac{dp}{dy}$.

Подставляя, получим уравнение с разделяющимися переменными

$$p \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{2p^2}{y-1}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2dy}{y-1} \Rightarrow \ln|p| = 2\ln|y-1| + \ln|c_1| \Rightarrow p = c_1 \cdot (y-1)^2.$$

Возвращаясь к переменной *y*, имеем

$$y' = c_1 \cdot (y-1)^2 \Rightarrow \frac{dy}{(y-1)^2} = c_1 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int c_1 dx,$$

где интеграл, стоящий в левой части подстановкой $t = y-1$ приведем к

табличному $\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c$, тогда получим

$-\frac{1}{y-1} = c_1 \cdot x + c_2$, откуда $y = 1 - \frac{1}{c_1 \cdot x + c_2}$ - общее решение.

в) $y' - y' - 6y = 10e^{3x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$

Решение.

Имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами вида:

$y' + py' + q = f(x)$, где p,q – числа.

Общее решение этого уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $(y' + py' + q = 0)$ и частного решения неоднородного уравнения т.е. $y = Y + \bar{y}$

Чтобы найти общее решение однородного уравнения Y, составляют характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, по корням этого уравнения

записывают вид общего решения Y

В нашем примере: $y' - y' - 6y = 0$ - соответствующее однородное уравнение.

$k^2 - k - 6 = 0$ – характеристическое уравнение, найдем его корни:

$D = 25 \quad \Rightarrow k_1 = -2; \quad k_2 = 3$. Корни действительные различные, следовательно,

общее решение однородного уравнения имеет вид: $Y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}$.

Корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$	**Общее решения**
1. $D > 0$ $k_1 \neq k_2$ -действительные различные	$Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. $D = 0$ $k_1 = k_2$ - действительные равные	$Y = C_1 e^{k_2 x} + C_2 x e^{k_2 x} = e^{k_2 x}\left(C_1 + C_2 x\right)$
3. $D < 0$ $\left[\begin{array}{l} k_1 = \alpha + \beta \cdot i \\ k_2 = \alpha - \beta \cdot i \end{array}\right.$ -комплексные сопря женные.	$Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

Частное решение неоднородного уравнения находим по виду правой части уравнения, при этом: если $f(x) = P_n(x)e^{2x}$, где $P_n(x)$многочлен n-ой степени с неопределенными коэффициентами, то частное решение будет иметь вид:

1. $\overline{y} = Q_n(x)e^{2x}$, где $Q_n(x)$- многочлен n-ой степени с неопределенными коэффициентами

2. $\overline{y} = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{2x}$, если α совпадает с одним из корней характеристического уравнения $\left(\alpha = k_1 или \alpha = k_2\right)$

3. $\overline{y} = x^2 \cdot Q_n(x)e^{2x} если \alpha = k_1 = k_2$

Если $f(x) = P_n(x), то \alpha = 0$

В нашем примере:

$f(x) = 10e^{3x}, \alpha = 3 = k_2$ имеем второй случай, множитель перед e^{3x} - многочлен нулевой степени, частное решение записываем в виде: $\overline{y} = xAe^{3x}$, где A

неопределенный коэффициент, чтобы найти значение A решение $\overline{y}$ подставляем в данное уравнение, для этого найдем $\overline{y}'$ и $\overline{y}''$

$$\bar{y}' = \left(xA\cdot e^{3x}\right)' = A\left(e^{3x}+3xe^{3x}\right) = Ae^{3x} + A\cdot 3\cdot x\cdot e^{3x}$$

$$\bar{y}'' = 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}$$

Подставляем в данное уравнение значение $\bar{y},\ \bar{y}'',\ \bar{y}'$

$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + 2x\cdot e^{3x}$ - общее решение данного уравнения.

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=-4$, найдем:

$$y' = -2c_1e^{-2x} + 3c_2e^{3x} + 2\cdot e^{3x} + 6x\cdot e^{3x}.$$

Используя начальные условия, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = c_1\cdot e^0 + c_2\cdot e^0 + 2\cdot 0\cdot e^0 \\ -4 = -2c_1\cdot e^0 + 3c_2\cdot e^0 + 2\cdot e^0 + 6\cdot 0\cdot e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -2c_1 + 3c_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ -2(1-c_2) + 3c_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{5} \\ c_2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Следовательно, $y = \frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{4}{5}e^{\frac{4}{5}} + 2x\cdot e^{3x}$ - частное решение неоднородного уравнения.

Савельева Екатерина Владимировна

Математика: методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры. Часть 1.

Электронное задание

ФГБОУ ВО Приморская ГСХА

Адрес: 692510, г. Уссурийск, пр-т Блюхера, 44