f6c6d686f0c899fdf76a1ed8b448452ab8cac6fb1af6547b6d40cdf1bdc60ae2

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Приморская государственная сельскохозяйственная академия
Инженерно-технологический институт

М А Т Е М А Т И К А

Методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры Часть 2

Электронное издание

Уссурийск 2021

Составитель: Савельева Е.В., канд.тех.наук, доцент инженерно-технологического института.

Математика: методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки. Часть 2. 21.03.02 Землеустройство и кадастры [Электронный ресурс]: / Е.В. Савельева; ФГБОУ ВО ПГСХА. - Электрон. текст дан. - Уссурийск: ПГСХА, 2021. - 49 с. - Режим доступа: www. de.primacad.ru.

Рецензент: И.В. Жуплей, к.э.н., доцент института землеустройства и агротехнологии.

Методические указания составлены в соответствии требованиям стандарта ФГОС 3++ по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры, содержат контрольные задания для самостоятельной работы обучающихся и методические указания по их выполнению.

Издается по решению методического совета ФГБОУ ВО Приморская ГСХА.

Введение

Настоящие методические указания составлены с целью помочь студенту-заочнику овладеть основными приемами и методами решения задач по высшей математике, привить умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике, повысить общий уровень математической культуры.

В методических указаниях приводятся рекомендации по изучению дисциплины, указания к выполнению контрольных работ, образцы решения типовых задач, контрольные задания.

Общие методические указания

Перед выполнением каждой контрольной работы студент должен изучить указанные темы рабочей программы, используя литературу и лекции.

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольные задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать ее условие.

2. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем. Решение задач геометрического, содержания должно сопровождаться чертежами.

3. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с ***последней цифрой*** *его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (т. е. 1, 3, 5, 7, 9), то номера задач соответствующего варианта даны в таблице 1.*

Если предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (т. е. 2, 4, 6, 8, 0), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 2.

Таблица №1

№	Контрольная работа предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (т. е. 1, 3, 5, 7, 9)														
1	151	161	171	181	191	201	211	221	231	241	251	261	271	281	291
2	152	162	172	182	192	202	212	222	232	242	252	262	272	282	292
3	153	163	173	183	193	203	213	223	233	243	253	263	273	283	293
4	154	164	174	184	194	204	214	224	234	244	254	264	274	284	294
5	155	165	175	185	195	205	215	225	235	245	255	265	275	285	295
6	156	166	176	186	196	206	216	226	236	246	256	266	276	286	296
7	157	167	177	187	197	207	217	227	237	247	257	267	277	287	297
8	158	168	178	188	198	208	218	228	238	248	258	268	278	288	298
9	159	169	179	189	199	209	219	229	239	249	259	269	279	289	299
0	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300

Таблица №2

№	Контрольная работа предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное или ноль (т. е. 2, 4, 6, 8, 0)														
1	160	165	175	186	191	202	215	222	232	244	254	261	271	281	292
2	159	164	172	187	192	203	216	223	233	245	253	262	272	282	293
3	158	166	171	188	193	204	218	224	234	246	251	263	273	283	294
4	157	163	180	189	194	205	213	225	235	247	255	264	274	284	295
5	156	162	173	190	195	206	214	226	236	248	256	265	275	285	296
6	155	169	178	181	196	207	211	227	237	249	257	266	276	286	297
7	154	161	177	182	197	208	210	228	238	250	258	267	277	287	298
8	153	170	176	183	198	209	219	229	239	241	252	268	278	288	299
9	152	166	179	184	199	210	220	230	240	242	259	269	279	289	300
0	151	167	174	185	200	201	217	221	231	243	260	270	280	290	291

Дисциплина и ее основные разделы, изучаемые на 2 курсе

№ ДЕ	Наименование дидактической единицы	№ темы	Основные разделы ДЕ
4.	Математический анализ	18	Функция нескольких переменных. Определение функции нескольких переменных, область определения, график. Частные производные 1 и 2 порядка, их геометрический смысл. Дифференциал функции двух переменных, применение к приближенным вычислениям. Экстремум функции.
		19	Кратные интегралы. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла (об объеме цилиндрического бруса). Определение двойного интеграла, его свойства, вычисление путем сведения к кратным. Тройной интеграл, его вычисление. Геометрические и физические приложения кратных интегралов(вычисление площадей, объемов, массы , моментов инерции и статических моментов, координат центра тяжести)
		20	Криволинейные интегралы. Задача о вычислении работы переменной силы. Определение криволинейного интеграла по координатам, его свойства, вычисление путем сведения к определенному. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Приложения криволинейного интеграла (нахождение функции по ее полному дифференциалу, вычисление работы переменной силы по криволинейному участку пути).
5	Дифференциальные уравнения	21	Дифференциальные уравнения – основные понятия. Задачи. приводящие к понятию дифференциальных уравнений. Порядок дифференциального уравнения, общее и частное решения. Геометрический смысл.
		22	Дифференциальные уравнения 1 порядка. Типы: с разделяющимися переменными, линейные, однородные, в полных дифференциалах. Методы их решения.
		23	Дифференциальные уравнения 2 порядка. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка. Линейные однородные и неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. характеристическое уравнение. Структура общего решения. дифференциальные уравнения второго порядка.

6	Ряды	24	Числовые ряды. Определение сходимости и расходимости рядов. Необходимый признак сходимости. Признаки сходимости положительных числовых рядов (признаки сравнения, признак Даламбера, интегральный признак).Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.
		25	Степенной ряд. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Исследование степенных рядов.
		26	Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора, Маклорена. Условия разложимости функции в степенной ряд. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена. Биномиальный ряд. Применение рядов к приближенным вычислениям .
7	Теория вероятностей	27	События. Классификация событий. Относительная частота, статистическое и классическое определение вероятности. Сумма событий. Теорема о вероятности суммы несовместных событий. Теорема о вероятности суммы двух совместных событий. Произведение событий. Условная вероятность. Теоремы умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
		28	Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Наивероятнейшая частота при повторении опытов. Асимптотические формулы. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Лапласа. Формула Пуассона.
		29	Случайная величина. Дискретная случайная величина. Виды случайных величин, закон распределения. Числовые характеристики дискретных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, их свойства.
		30	Случайная величина. Непрерывная случайная величина. Интегральная функция распределения, дифференциальная функция распределения (плотность распределения) их свойства, графики. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
		31	Нормальное распределение. Вероятностный смысл параметров распределения. Кривая нормального распределения. Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины в заданный интервал. Вероятность заданного отклонения. Доверительный интервал.

8	Математическая статистика	32	<u>Генеральная совокупность и выборка.</u> Вариационные ряды. Дискретные, интервальные их составление. Статистическое распределение выборки. Числовые характеристики статистических рядов (мода, медиана, выборочная средняя, выборочная дисперсия, коэффициент вариации)
		33	<u>Статистические оценки</u>. Точечные оценки параметров распределения. Статистические оценки характеристик генеральной совокупности. Погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объема выборки.
		34	<u>Статистические гипотезы.</u> Понятие о критериях согласия. Проверка гипотез о равенстве долей и средних
		35	<u>Корреляционный анализ.</u> Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов.

<u>Тема:11</u> Функция двух переменных (задачи 151-160). Перед выполнением задач необходимо изучить раздел 18 ДЕ-4 (математический анализ).

151-160. Дана функция двух переменных *z =f(x,y)*.

Требуется:

1.исследовать данную функцию на экстремум;

2. найти градиент функции в точке *A*;

3. найти производную функции в точке *A* по направлению градиента.

151. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$	*A(1;2)*
152. $z = xy - y^2 - x^2 + 1$	*A(2;2)*
153. $z = 2x^3 - xy + y^2 + 5x^2$	*A(0;1)*
154. $z = x^3 - 9xy + y^3 + 27$	*A(0;-2)*
155. $z = -x^2 + xy - 2y^2 + x + 10y$	*A(-1;4)*
156. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y$	*A(0;-2)*
157. $z = x^3 - 3xy + y^3 + 10$	*A(2;0)*
158. $z = 2x^3 - 6xy + 2y^3 + 1$	*A(1;2)*
159. $z = x^3 - 2xy + 8y^3 + 2$	*A(-1;1)*
160. $z = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 4$	*A(-2;1)*

Решение типового примера

Дана функция: $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x - 4$, точка $A(1;-2)$.

Требуется: 1.исследовать данную функцию на экстремум; 2. найти градиент функции в точке *A*; 3. найти производную функции в точке *A* по направлению градиента

Решение.

1) Чтобы исследовать данную дважды дифференцируемую функцию на экстремум необходимо выполнить следующие действия:

а) Найдем частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнять к нулю и решить систему уравнений, решением которой являются стационарные точки

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x - y + 6; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + 6 = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y - y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y = -6 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Следовательно, заданная функция имеет только одну стационарную точку *P(4,-2)*.

б) Найдем частные производные второго порядка и их значения в стационарной точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1 \ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 .$$

Частные производные второго порядка не зависят от переменных *x* и *y*, следовательно, постоянны в любой точке. Поэтому для точки *P(4,-2)* имеем *A=-2;B=-1;C=-2*.

в) составить и вычислить определитель второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = (-2)\cdot(-2) - (-1)^2 = 3$$

г) Если в исследуемой стационарной точке $\Delta > 0$, то функция *z=f(x,y)* в этой точке имеет максимум при *A<0* и минимум при *A>0*; если $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума. Если $\Delta = 0$, то вопрос об экстремуме требует дополнительного исследования. Для данной функции $\Delta > 0$ и *A<0*, следовательно, в точке *P(4,-2)* имеем максимум.

д) Найдем значение функции:

$$z_{\max} = z(4;-2) = -(4^2) - 4\cdot(-2) - (-2)^2 + 6\cdot 4 - 4 = 8.$$

2) Градиент функции находится по формуле

$$\overrightarrow{grad}\, z(x;y) = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \vec{j} \tag{1}$$

Подставим в формулу (1) найденные частные производные, получим

$$\overrightarrow{grad}\, z(x;y) = (-2x - y + 6) \cdot \vec{i} + (-x - 2y) \cdot \vec{j}.$$

Вычислим градиент в точке $A(1;-2)$

$$\overrightarrow{grad}\, A = (-2 \cdot 1 - (-2) + 6) \cdot \vec{i} + (-1 - 2 \cdot (-2)) \cdot \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{grad}\, A = 6\vec{i} + 3\vec{j}.$$

3) Производная по направлению в точке, выражается через частные производные функции, следующим образом:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_A = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A \cdot \cos\beta. \tag{2}$$

$\cos\alpha$ и $\cos\beta$ - направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, в нашем случае вектор $\vec{s}$ совпадает с $\overrightarrow{grad}\, z$.

Найдем направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{45}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad ; \qquad \cos\beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Подставим полученные выражения в формулу (2), получим:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_A = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_A = \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

<u>**Тема:12**</u> Кратные интегралы (задачи 161-170,171-180). Перед выполнением задач необходимо изучить раздел 19 ДЕ-4 (математический анализ).

161-170. Дан двойной интеграл по области *D*.

Требуется:

1) изобразить область интегрирования *D*;

2) вычислить двойной интеграл при заданном порядке интегрирования;

3) изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл при измененном порядке.

161. $\iint_D 2yxdxdy$; $D:\begin{cases} 0 \le y \le 2x \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

162. $\iint_D 2xdxdy$; $D:\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}$

163. $\iint_D ydxdy$; $D:\begin{cases} 0 \le y \le x^2 \\ 0 \le x \le 3 \end{cases}$

164. $\iint_D 3yxdxdy$; $D:\begin{cases} 0 \le y \le x-1 \\ 1 \le x \le 5 \end{cases}$

165. $\iint_D 2ydxdy$; $D:\begin{cases} x^2 \le y \le 4 \\ -2 \le x \le 2 \end{cases}$

166. $\iint_D xdxdy$; $D:\begin{cases} -4 \le y \le -x^2 \\ -2 \le x \le 2 \end{cases}$

167. $\iint_D xydxdy$; $D:\begin{cases} 0 \le y \le x-3 \\ 3 \le x \le 7 \end{cases}$

168. $\iint_D 4xdxdy$; $D:\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{x}+1 \\ 1 \le x \le 4 \end{cases}$

169. $\iint_D 2ydxdy$; $D:\begin{cases} x^2 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

170. $\iint_D 6xdxdy$; $D:\begin{cases} 0 \le y \le x^3 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

Решение типового примера

Дан двойной интеграл по области D: $\iint_D 3x^2dxdy$; $D:\begin{cases} 2 \le y \le 6-x^2 \\ -2 \le x \le 2 \end{cases}$

Требуется:

1) изобразить область интегрирования *D;*

2) вычислить двойной интеграл при заданном порядке интегрирования;

3) изменить порядок интегрирования и вычислить интеграл при измененном порядке.

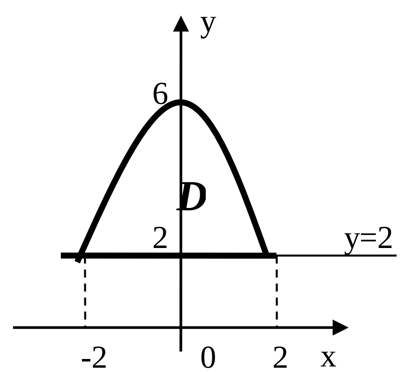

Рисунок 1

Решение.

1) Построим линии $y = 6 - x^2$, $y = 2$ на отрезке $[-2;2]$, получим область D на рисунке 1.

2) Вычислим двойной интеграл при заданном порядке интегрирования:

$$\iint_D 3x^2 dxdy = \int_{-2}^{2} 3x^2 dx \int_{2}^{6-x^2} dy = \int_{-2}^{2} 3x^2 dx \left(y \Big|_{2}^{6-x^2} \right) = \int_{-2}^{2} 3x^2 \left(6 - x^2 - 2\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(12x^2 - 3x^4\right) dx =$$

$$= \left(\frac{12x^3}{3} - \frac{3x^5}{5} \right)\Bigg|_{-2}^{2} = 4 \cdot 8 - \frac{3}{5} \cdot 32 - 4 \cdot (-8) + \frac{3}{5} \cdot (-32) = 64 - \frac{192}{5} = \frac{128}{5} = 25{,}6\,.$$

3) Изменим, порядок интегрирования, для этого установим пределы интегрирования для внешнего интеграла по переменной y.

Пределы внешнего интеграла найдем как ординаты самой нижней и самой верхней точек области D: $y=2$ и $y=6$.

Решая уравнение границы области D (парабола) относительно x, найдем пределы внутреннего интеграла.

$$y = 6 - x^2 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{6 - y} \quad - \textit{верхний} \quad \textit{предел}, \\ x = -\sqrt{6 - y} \quad - \textit{нижний} \quad \textit{предел}. \end{array} \right.$$

Подставим найденные пределы в интеграл:

$$\iint_D 3x^2 dxdy = \int_{2}^{6} 3dy \int_{-\sqrt{6-y}}^{\sqrt{6-y}} x^2 dx = \int_{2}^{6} 3dy \left(\frac{x^3}{3} \Bigg|_{-\sqrt{6-y}}^{\sqrt{6-y}} \right) = \int_{2}^{6} \left[\left(\sqrt{6 - y}\right)^3 - \left(-\sqrt{6 - y}\right)^3 \right] dy =$$

$$= 2\int_{2}^{6} (6 - y)^{3/2} dy = -2 \frac{(6 - y)^{5/2}}{5/2} \Bigg|_{2}^{6} = -\frac{4}{5}\left(0 - \sqrt{4^5}\right) = \frac{4}{5} \cdot 32 = \frac{128}{5} = 25{,}6.$$

171-175. Неоднородная пластина ограничена линиями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Найти массу пластины, если в каждой точке поверхностная плотность равна $\gamma = \gamma(x; y)$.

№	$y = f_1(x)$	$y = f_2(x)$	$\gamma = \gamma(x; y)$
171	$y = -3x - 2$	$y = x^2$	$\gamma = 5x$
172	$y = 7x + 8$	$y = x^2$	$\gamma = 5y$
173	$y = -8x - 7$	$y = x^2$	$\gamma = 2x$
174	$y = 5x + 14$	$y = x^2$	$\gamma = 2y$
175	$y = 3x - 2$	$y = x^2$	$\gamma = 3x$

Решение типового примера.

Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = 3x - 3$ и $y = x^2 - 3$. Поверхностная плотность в каждой точке пластины равна $\gamma = 6x$.

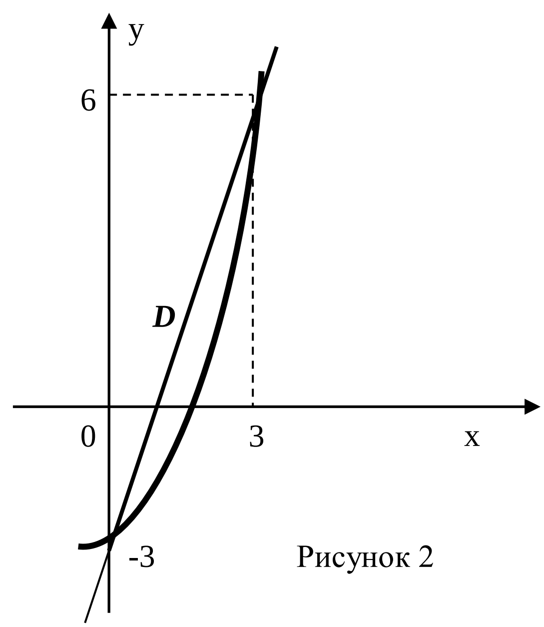

Рисунок 2

Решение.

$\gamma = \gamma(x; y)$ находится по формуле

$$m = \iint_D \gamma(x; y)dxdy.$$

Следовательно, в нашем случае нужно вычислить двойной интеграл

$$m = \iint_D 6xdxdy.$$

Построим область D , ограниченную: $y = 3x - 3$- прямой; $y = x^2 - 3$- параболой с вершиной *O(0;0)*, рисунок 2.

Для этого найдем точки пересечения:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ y = 3x - 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 3 = 3x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = 3 \\ y_1 = -3, y_2 = 6 \end{array} \right.$$

Пределы внешнего интеграла по переменной x числа 0 и 3 – указывают на то, что пластина ограничена слева прямой $x=0$ и справа прямой $x=3$. Пределы внутреннего интеграла по переменной y указывают на то, что пластина ограничена снизу параболой $y = x^2 - 3$ и сверху прямой $y = 3x - 3$.

Таким образом

$$m = \iint_D 6x dx dy = \int_0^3 6x dx \int_{x^2-3}^{3x-3} dy = \int_0^3 6x dx \left(y \Big|_{x^2-3}^{3x-3} \right) = \int_0^3 6x dx \left(3x - 3 - \left(x^2 - 3\right)\right) =$$

$$= \int_0^3 \left(18x^2 - 6x^3\right) dx = \left(6x^3 - 1{,}5x^4\right)\Big|_0^3 = 162 - 121{,}5 = 40{,}5(\textit{ед.массы}).$$

176-180. С помощью двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного заданными поверхностями и расположенного в первом октанте.

176. $x^2 + y^2 = 25$; $x^2 + z^2 = 25$;

177. $x^2 + y^2 = 16$; $x^2 + z^2 = 16$;

178. $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + z^2 = 4$;

179. $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + z^2 = 4$;

180 $z^2 = x^2 + y^2$; $y = -x + 2$;

Решение типового примера

Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 9$; $x^2 + z^2 = 9$ и расположенного в первом октанте.

Решение.

Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;y)$,

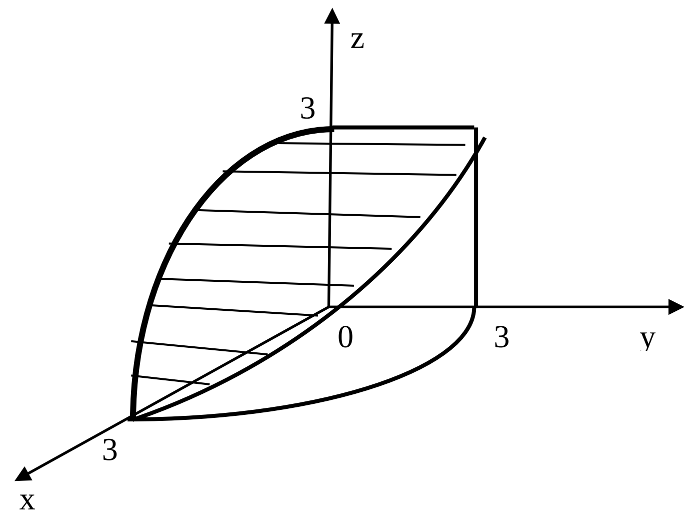

Рисунок 3

снизу плоскостью *z=0* и по бокам прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости *xOy* область *D*, вычисляется по формуле: $V = \iint_D f(x;y)dxdy$.

В данном случае заданное тело ограничено двумя круговыми цилиндрами, область *D* – это часть круга радиуса 3, расположенная в первом квадранте (рис.3).

Искомый объем выразится интегралом:

$$V = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-x^2}\,dy = \int_0^3 \left[\sqrt{9-x^2} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \right] dx = \int_0^3 \sqrt{9-x^2} \left(y \Big|_0^{\sqrt{9-x^2}} \right) dx =$$

$$= \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 27 - 9 = 18 (ед^3).$$

<u>**Тема:13**</u> Криволинейные интегралы (задачи 181-190). Перед выполнением задач необходимо изучить раздел 20 ДЕ-4 рабочей программы.

181-185. Вычислить криволинейный интеграл $K = \int_L P(x;y)dx + Q(x;y)dy$ **от точки** ***O(0;0)*** **до точки** ***C(2;-2)*** **по двум различным путям:**

1) *L* – ломаная *OAC*, где *A(2;0)*;

2) *L*- дуга параболы $y=-\frac{1}{2}x^2$**.**

Полученные результаты сравнить и объяснить их совпадение.

181. $\int\limits_L (5x+2y)dx+(2x-y)dy$	184. $\int\limits_L (2x+4y)dx+(4x+3y)dy$
182. $\int\limits_L (2x+3y)dx+(3x-4y)dy$	185. $\int\limits_L (x-5y)dx-(5x+6y)dy$
183. $\int\limits_L (x-y)dx-(x-2y)dy$	

186-190. Вычислить криволинейный интеграл $K=\int\limits_L P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ **от точки *O(0;0)* до точки *C(4;8)* по двум различным путям:**

1) *L* – ломаная *OBC*, где *B(0;8)*;

2) *L*- дуга параболы $y=\frac{1}{2}x^2$**.**

Полученные результаты сравнить и объяснить их совпадение.

186. $\int\limits_L (3x+2y)dx+(2x-1)dy$	189. $\int\limits_L (4x-y)dx-(x+5y)dy$
187. $\int\limits_L (x+4y)dx+(4x+7)dy$	190. $\int\limits_L (5x+2y)dx+(2x+6y)dy$
188. $\int\limits_L (-3x+y)dx+(x+4y)dy$	

Решение типового примера

Вычислить криволинейный интеграл $K=\int\limits_L (x+2y^2)dx+(1+4xy)dy$ от точки *O(0;0)* до точки *C(2;4)* по трем различным путям:

1) L – ломаная OAC, где $A(2;0)$;

2) L – ломаная OBC, где $B(0;4)$;

3) L- дуга параболы $y = x^2$.

Полученные результаты сравнить и объяснить их совпадение.

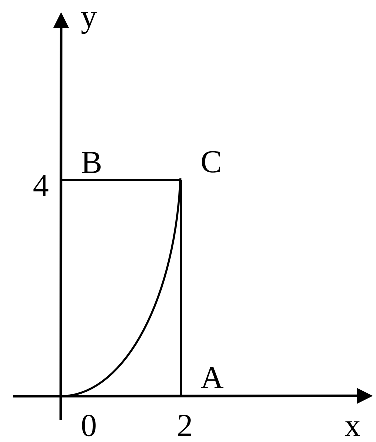

Рисунок 4

Решение.

Построим область интегрирования, рисунок 4.

1) Вычислим интеграл по ломаной OAC.

Интеграл равен сумме интегралов на отрезках OA и AC: $K_{OAC} = K_{OA} + K_{AC}$.

На отрезке OA: $y = 0,\ \ dy = 0,\ \ 0 \le x \le 2$, следовательно

$$K_{OA} = \int_L \left(x + 2y^2\right)dx + (1 + 4xy)dy = \int_0^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = \frac{2^2}{2} - 0 = 2.$$

На отрезке AC: $x = 2,\ \ dx = 0,\ \ 0 \le y \le 4$,

следовательно $K_{AC} = \int_0^4 (1 + 8y)dy = \left.\left(y + 4y^2\right)\right|_0^4 = 4 + 64 = 68$.

Тогда $K_{OAC} = K_{OA} + K_{AC} = 2 + 68 = 70$.

2) Вычислим интеграл по ломаной OBC.

Интеграл равен сумме интегралов на отрезках OB и BC: $K_{OBC} = K_{OB} + K_{BC}$.

На отрезке OB: $x = 0,\ \ dx = 0,\ \ 0 \le y \le 4$, следовательно $K_{OB} = \int_0^4 dy = \left.y\right|_0^4 = 4$.

На отрезке BC: $y = 4,\ \ dy = 0,\ \ 0 \le x \le 2$, следовательно.

Тогда $K_{OBC} = K_{OB} + K_{BC} = 4 + 66 = 70$.

3) Вычислим интеграл по дуге параболы $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx, \quad 0 \le x \le 2$,

$$K = \int_0^2 \left(x + 2x^4\right)dx + \left(1 + 4x \cdot x^2\right) \cdot 2xdx = \int_0^2 \left(x + 2x^4 + 2x + 8x^4\right)dx = \int_0^2 \left(3x + 10x^4\right)dx =$$

$$\left.\left(\frac{3x^2}{2} + 2x^5\right)\right|_0^2 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 32 = 6 + 64 = 70$$

Как видно во всех случаях получено одно и тоже значение криволинейного интеграла. Совпадение результатов объясняется тем, что выполняется условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, где $P(x; y) = x + 2y^2$, $Q(x; y) = 1 + 4xy$.

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y} = \left(x + 2y^2\right)'_y = 4y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(1 + 4xy\right)'_x = 4y$.

191-200. Вычислить работу, совершаемую переменной силой $\vec{F} = P(x; y) \cdot \vec{i} + Q(x; y) \cdot \vec{j}$ на криволинейном участке пути L, соединяющем заданные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

191. $\vec{F} = \left(2x^2 + y\right) \cdot \vec{i} + \left(3xy + 2\right) \cdot \vec{j}$	$A(0;0)$	$B(1;3)$	L- дуга параболы $y = x^2 + 2x$
192. $\vec{F} = \left(x^2 - y\right) \cdot \vec{i} + \left(xy + 5\right) \cdot \vec{j}$	$A(0;-4)$	$B(2;0)$	L- отрезок прямой,соединяющей точки А и В
193. $\vec{F} = \left(3xy + 1\right) \cdot \vec{i} + \left(x^2 - y\right) \cdot \vec{j}$	$A(-1;-1)$	$B(0;0)$	L- дуга параболы $y = x^3$
194. $\vec{F} = \left(5x^2 + y\right) \cdot \vec{i} + \left(xy + 3\right) \cdot \vec{j}$	$A(1;9)$	$B(2;32)$	L- дуга параболы $y = 7x^2 + 2x$
195. $\vec{F} = \left(2xy + y\right) \cdot \vec{i} + \left(x^2 + y\right) \cdot \vec{j}$	$A(0;-1)$	$B(1;1)$	L- отрезок прямой,соединяющей точки А и В

196. $\vec{F}=(-xy+7)\cdot\vec{i}+(3x^2+y)\cdot\vec{j}$	$A(1;1)$	$B(2;4)$	L- отрезок прямой,соединяющей точки А и В
197. $\vec{F}=(x^2+2y)\cdot\vec{i}+(2xy-8)\cdot\vec{j}$	$A(1;2)$	$B(2;6)$	L- дуга параболы $y=x^2+x$
198. $\vec{F}=(4xy+4)\cdot\vec{i}+(x^2+2y)\cdot\vec{j}$	$A(1;5)$	$B(2;14)$	L- дуга параболы $y=3x^2+2$
199. $\vec{F}=(5xy-3)\cdot\vec{i}+(x^2-4y)\cdot\vec{j}$	$A(-1;-4)$	$B(1;6)$	L- дуга параболы $y=x^2+5x$
200. $\vec{F}=(x^2+3y)\cdot\vec{i}+(3xy+8)\cdot\vec{j}$	$A(-1;-3)$	$B(0;2)$	L- отрезок прямой,соединяющей точки А и В

Решение типового примера

Вычислить работу, совершаемую переменной силой $\vec{F}=(x^2+4y)\cdot\vec{i}+(4xy-7)\cdot\vec{j}$ на криволинейном участке пути L, соединяющем заданные точки $A(0;-1)$ и $B(2;7)$:

Решение.

Переменная сила $\vec{F}=P(x;y)\cdot\vec{i}+Q(x;y)\cdot\vec{j}$ на криволинейном участке AB производит работу, которая находится по формуле

$$A=\int_{AB} P(x;y)\cdot dx+Q(x;y)\cdot dy.$$

Таким образом, для нахождения работы необходимо вычислить криволинейный интеграл

$$A=\int_{AB}(x^2+4y)\cdot dx+(4xy-7)\cdot dy.$$

Найдем уравнение прямой AB (пути интегрирования) по формуле

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y+1}{7+1}=\frac{x-0}{2-0}\Rightarrow\frac{y+1}{8}=\frac{x}{2}\Rightarrow 2\cdot(y+1)=8x\Rightarrow y=4x-1$$- уравнение прямой AB.

Следовательно $dy=4dx$, при этом $0\le x\le 2$, тогда:

$$A=\int\limits_{AB}\left(x^2+4(4x-1)\right)\cdot dx+\left(4x(4x-1)-7\right)\cdot 4dx=\int\limits_0^2\left(x^2+16x-4+64x^2-16x-28\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(65x^2-32\right)dx=\left(65\cdot\frac{x^3}{3}-32x\right)\Bigg|_0^2=\frac{65}{3}\cdot 8-64-0=109{,}33(\textit{ед.работы}).$$

<u>Тема:14</u> Числовые и степенные ряды. Применение рядов к приближенным вычислениям (задачи 221-250). Перед выполнением задач необходимо изучить разделы 24,25,26 ДЕ-6 (ряды).

221-225.Исследовать сходимость рядов, используя признак Даламбера.

221. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{6^n}$	224. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\ (n+1)}{4^n}$
222. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$	225. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$
223. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{5^n}$	

226-230. Исследовать сходимость рядов, пользуясь интегральным признаком сходимости Коши.

226. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$	229. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{2n}}$
227. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+3}}$	230. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$
228. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7n-1}$	

231-240. Дан степенной ряд. Написать первые три члена ряда и найти интервал сходимости, определить тип сходимости ряда на концах интервала сходимости.

231. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot\sqrt{n+1}}$	236. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{4n+2}\cdot 7^n}$
232. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+n^2)\cdot 7^n}$	237. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+6)\cdot 4^n}$
233. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)^2\cdot 2^n}$	238. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(4+n^2)\cdot 5^n}$
234. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)\cdot 6^n}$	239. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot n}$
235. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+3n)^2\cdot 8^n}$	240. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot(n+2)}$

Решение типового примера

Дан степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3\cdot 9^n}$. Написать первые три члена ряда и найти интервал сходимости, определить тип сходимости ряда на концах интервала сходимости.

Решение.

Беря последовательность n=1,2,3,…., запишем данный ряд в виде:

$$\frac{x}{1\cdot 9}+\frac{x^2}{8\cdot 81}+\frac{x^3}{27\cdot 243}+\ldots\ldots..$$

Общий член ряда $U_n=\frac{x^n}{n^3\cdot 9^n}$, тогда $U_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^3\cdot 9^{n+1}}$.

Для нахождения интервала сходимости воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n^3\cdot 9^n}{x^n\cdot(n+1)^3\cdot 9^{n+1}}\right|=\frac{1}{9}\cdot|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3}{(n+1)^3}\right|=\frac{1}{9}\cdot|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right|=$$

$$= \frac{1}{9} \cdot |x| \cdot \lim_{n \to \infty} \left| \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^3 \right| = \frac{1}{9} \cdot |x| \cdot 1 = \frac{1}{9} \cdot |x| \cdot$$

Данный ряд абсолютно сходится при тех значениях *x*, которые удовлетворяют условию:

$\frac{1}{9} \cdot |x| < 1$, или $|x| < 9$, или $-9 < x < 9$ - интервал сходимости степенного ряда.

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала.

1) При *x=-9* заданный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-9)^n}{n^3 \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9)^n \cdot (-1)^n}{n^3 \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}.$$

Полученный числовой ряд является знакочередующимся. Этот ряд сходится по признаку Лейбница, так как выполняются два условия признака Лейбница.

а) Члены ряда убывают по абсолютной величине, т.е.

$$1 > \frac{1}{8} > \frac{1}{27} > \frac{1}{64} > .....$$

б) Предел общего члена ряда стремится к нулю при $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Следовательно, *x=-9* входит в интервал сходимости.

2) При *x=9* ряд примет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(9)^n}{n^3 \cdot 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Получим знакоположительный числовой ряд, исследуем его по интегральному признаку Коши.

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x^{-3} dx = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) \Bigg|_1^b = -\lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{2b^2} - \frac{1}{2} \right) = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{2} \right) = -\left(0 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Несобственный интеграл сходится, следовательно, сходится и исследуемый ряд и значение *x=9* принадлежит интервалу сходимости .

Таким образом $-9 \le x \le 9$ - интервал сходимости степенного ряда.

241-250. Требуется вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда.

241. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{x} \cdot e^{-x}\, dx$	246. $\int\limits_0^{1} x \cdot \sin \sqrt{x} dx$
242. $\int\limits_0^{0,3} x\; e^{-x^3} dx$	247. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$
243. $\int\limits_0^{1} x^2 \cdot \cos\sqrt{x} dx$	248. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$
244. $\int\limits_0^{0,4} x e^{-5x^3} dx$	249. $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$
245. $\int\limits_0^{1} x \cdot \cos 2x dx$	250. $\int\limits_0^{0,1} \sin(10x^2) dx$

При решении задач 241-250 воспользуйтесь разложением следующих элементарных функций в степенной ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots \qquad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \qquad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots \qquad x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots \qquad x \in (-1; 1]$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} x^4 + \ldots\ldots$$

Решение типового примера.

Требуется вычислить определенный интеграл $\int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx$ с точностью до 0,001 путем предварительного разложения подынтегральной функции в ряд и почленного интегрирования этого ряда.

Решение.

Для решения задачи необходимо подынтегральную функцию представить в виде степенного ряда. Используем известное разложение в степенной ряд тригонометрической функции $sinx$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Заменим переменную *x* на *2x*.

Получим разложение функции *sin2x*,

$$\sin 2x = \frac{2x}{1!} - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + ...$$

Разделим почленно на *x*.

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 - \frac{2^3 \cdot x^2}{3!} + \frac{2^5 \cdot x^4}{5!} - \frac{2^7 x^6}{7!} + ...$$

Проинтегрируем полученный ряд.

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{0,5} \left(2 - \frac{2^3 \cdot x^2}{3!} + \frac{2^5 \cdot x^4}{5!} - \frac{2^7 \cdot x^6}{7!} + ... \right) dx = \left[2x - \frac{2^3 x^2}{3!} + \frac{2^5 x^4}{5!} - \frac{2^7 x^6}{7!} + ... \right]_0^{0,5} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + ... = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + ...$$

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + ...$$

Получен знакочередующийся ряд. Абсолютные величины членов ряда монотонно убывают, при этом предел общего члена ряда равен нулю при $n \to \infty$. Выполняются условия теоремы Лейбница. Следовательно, ряд сходится и имеет конечную сумму. Так как в этом ряде четвертый член по абсолютной величине меньше 0,001, то для достижения заданной степени точности можно ограничиться первыми тремя членами.

$$\int_0^{0,5}\frac{\sin 2x}{x}\approx 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}\approx 1-0{,}0556+0{,}0017\approx 0{,}946$$

<u>Тема:15</u> События. Действия над событиями. Повторные независимые испытания (задачи 251-260). Перед выполнением задач необходимо изучить разделы 27,28 ДЕ-7 (теория вероятностей).

251-260. Решить задачи.

251. В читальном зале имеется 12 учебников по физике, из которых 6 в мягком переплете. Библиотекарь взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.

252. Студент знает 36 из 50 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает ответ на все три вопроса билета.

253. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,7; для второго орудия – 0,9; для третьего – 0,85. Найти вероятность того, что только один снаряд попадет в цель.

254. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,92; второе – 0,98 и третье – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработают только два устройства.

255. По статистике в Приморском крае в июле 12 пасмурных дней. Найти вероятность того, что первого, второго и третьего июля будет ясная погода.

256. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что внимание рабочего потребует первый станок, равна 0,15;

второй – 0,2, третий – 0,1.Какова вероятность того, что только один станок потребует внимания рабочего?

257. В ящике 40 деталей, из них 5 с дефектом. Последовательно без возврата достают три детали. Какова вероятность того, что они без дефекта?

258. На ферме работают два транспортера для раздачи кормов. Вероятность выхода из строя каждого из них соответственно равна 0,25 и 0,2. Какова вероятность, что произойдет поломка хотя бы одного из транспортеров?

259. Эксперт оценивает качественный уровень трех видов изделий по потребительским признакам. Вероятность того, что изделию первого вида будет присвоен знак качества, равна 0,9; изделию второго вида – 0,85; изделию третьего вида – 0,8. Найти вероятность того, что знак качества будет присвоен только одному изделию.

260.Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятность безотказной работы первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что безотказно будет работать хотя бы один элемент.

Решение типового примера

1) Среди 8 лотерейных билетов имеется 5 билетов с выигрышем. Наудачу покупают 3 билета. Какова вероятность, что все три билета выигрышные?

Решение:

Используем теорему умножения вероятностей для зависимых событий.

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2 / A_1)\cdot P(A_3 / A_1 A_2),$$

где $P(A_2/A_1)$ - условная вероятность события A_2 при условии, что произошло событие A_1.

$P(A_3/A_1A_2)$ - условная вероятность появления события A_3 при условии, что произошли события A_1 и A_2.

В нашей задаче:

A_1 – первый купленный билет выигрышный.

A_2 – второй купленный билет выигрышный.

A_3 – третий купленный билет выигрышный.

Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. События A_1, A_2, A_3 зависимые.

$$P(A_1) = \frac{5}{8};\ P(A_2/A_1) = \frac{4}{7};\ P(A_3/A_1A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(A) = P(A_1A_2A_3) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{28}$$

2) Два студента независимо один от другого ищут книгу в магазинах. Вероятность того, что книга будет найдена первым студентом, равна 0,6, а вероятность того, что вторым – 0,8. Найти вероятность того, что:

1) оба студента найдут нужную книгу;
2) ни один студент не найдет нужную книгу;
3) только один студент найдет нужную книгу;
4) хотя бы один из студентов найдет нужную книгу.

Решение:

1) Обозначим события:

A – оба студента нашли нужную книгу,

A_1 – первый студент нашел книгу,

A_2 - второй студент нашел книгу.

Тогда событие A заключается в том, что и первый студент нашел книгу, и второй студент нашел книгу, т.е. имеем произведение событий: $A=A_1 \cdot A_2$, по условию задачи A_1 и A_2независимы, поэтому используем формулу умножения вероятностей для независимых событии:

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2)$$

В нашей задаче: $P(A_1) = 0{,}6;\quad P(A_2) = 0{,}8$, поэтому $P(A_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$

2) B - ни один из студентов не нашел нужной книги.

Событие В состоит в том, что оба студента не нашли нужной книги.

Обозначим:

$\overline{A}_1$ - первый студент не нашел книгу, $\overline{A}_2$ - второй студент не нашел книгу.

Тогда $B=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2$, получим $P(B)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)$.

Событие $\overline{A}_1$ - противоположное по отношению к событию A_1, поэтому:

$P(\overline{A}_1)+P(A_1)=1 \;\Rightarrow\; P(\overline{A}_1)=1-P(A_1) \;\Rightarrow 1-0{,}6=0{,}4$

I		II
+	и	–
	или	
–	и	+

(а)

Аналогично: $P(\overline{A}_1)=1-P(A_1) \;\Rightarrow 1-0{,}8=0{,}2$

Тогда $P(B)=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08$

3) C - только один из студентов найдет нужную книгу.

Событие C состоит в следующем: первый студент найдет книгу и одновременно второй студент не найдет книгу или первый студент не найдет книгу и второй студент одновременно найдет нужную книгу, т.е. это событие можно представить следующей схемой **(а)**, отсюда событие C представим следующим образом: $C=A_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot A_2$.

Используя теорему умножения для независимых событий и теорему сложения вероятностей для несовместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

получим:

$P(C)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)$ $\qquad P(C)=0{,}6\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}12+0{,}32=0{,}44$

4) D - хотя бы один из студентов найдет нужную книгу.

Вероятность этого события можно найти различными способами.

<u>I способ.</u> Событие D состоит в том, что нужную книгу найдут оба студента или один из них. Это событие можно представить в виде схемы **(б)**.

I		II
+	и	+
	или	
–	и	+
	или	
+	и	-

(б)

Отсюда: $D=A+C \;\Rightarrow P(D)=P(A)+P(C) \;\Rightarrow P(D)=0{,}48+0{,}44=0{,}92$

<u>II способ.</u> Событие D противоположно событию B, т.е. $D=\overline{B}$,

отсюда: $P(D)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}08=0{,}92$.

Как видим, ответы совпали при решении задачи различными способами.

261-265. При решении задач использовать формулы Бернулли или Пуассона для определения вероятностей появления события при повторных испытаниях.

261. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что из пяти выстрелов попаданий будет: а) четыре; б) менее двух.

262. Прибор состоит из шести узлов. Вероятность безотказной работы для каждого узла равна 0,7. Найти вероятность того, что из шести узлов выйдут из строя: а) два; б) менее двух узлов.

263. В поле работает восемь тракторов. Вероятность бесперебойной работы каждого трактора за смену постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что за смену из 8 тракторов поломаются: а) четыре; б) не более двух.

264. Вероятность появления бракованной детали равна 0,006. Найти вероятность того, что из 500 случайно отобранных деталей бракованных окажется: а) три; б) не более двух.

265. Система содержит 100 элементов. Вероятность, с которой может быть неисправный элемент системы равна 0,04. Определить вероятность того, что за определенный срок неисправны будут: а) четыре элемента; б) более одного элемента.

266-270. Взято n проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе равна p. Найти вероятность того, что число проб с промышленным содержанием металла будет: 1) равно m_1 раз, 2)не менее m_1 раз и не более m_2 раз.

№	n	p	m_1	m_2
266	225	0,2	50	60
267	810	0,4	340	400
268	300	0,3	110	130
269	100	0,6	60	80
270	300	0,25	75	90

Решение типового примера

1) Посажено 5 деревьев, вероятность того, что дерево приживется, равна $\frac{3}{4}$.

Какова вероятность, что приживется ровно 3 дерева?

Решение:

Если n - число всех проведенных испытаний,

$p = P(A)$ – вероятность появления события A в каждом испытании,

$q = p(\overline{A}) = 1 - p$ – вероятность не появления события A в каждом испытании, тогда вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз в n независимых испытаниях вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ - число сочетаний из n по m.

В нашей задаче дано: n=5; $p = \frac{3}{4}$. Требуется найти: а) $P_5(3)$; б) $P_5(m \geq 3)$.

Задачу решаем, используя формулу Бернулли :

Найдем $q=1-p=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$,

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{27}{1024} = \frac{135}{512} \approx 0{,}2637$$

2) На станциях отправления поездов находится 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,004. Какова вероятность того, что в течение часа выйдут из строя: а) два автомата, б) не менее двух автоматов.

Решение.

Формулу Бернулли удобно применять при $n \leq 10$. При большем значении n ($n>10$) применяют асимптотические формулы, т.е. приближенные формулы.

При больших значениях n $(n\to\infty)$ и малых p $(p\to 0)$, т.е. при $a = n\cdot p < 10$, применяют формулу Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m e^{-a}}{m!}$$

В нашей задаче дано: $n=1000$ (велико); p=0,004 (мало), тогда: $n\cdot p=1000\cdot 0{,}004=4<10$.

а) m=2; $P_{1000}(2) \approx \frac{4^2 \cdot e^{-4}}{2!} = 0{,}14653$, значение вероятности нашли по таблице 1 (см. приложение).

б) Пусть событие B – выйдут из строя не менее двух автоматов, т.е. от 2 до 1000. Рассмотрим событие $\overline{B}$ - противоположное событию B, которое состоит в том, что из строя выйдет меньше двух автоматов, т.е. один или ни одного,

тогда: $P(B) = 1 - P(\overline{B})$ или $P_{1000}(m \geq 2) = 1 - P_{1000}(m < 2) = 1 - P_{1000}(m = 0$ или $m = 1) = 1 - \left[P_{1000}(0) + P_{1000}(1)\right] = 1 - \left[0{,}01832 + 0{,}07326\right] = 1 - 0{,}9158 = 0{,}90842$

3) На тракторном заводе рабочий за смену изготовляет 900 деталей. Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна 0,9. Какова вероятность, что деталей первого сорта: а) будет ровно 800 штук;2) будет заключено между 800 и 860.

Решение.

а) Если число испытаний n велико, то применение формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям. В таких случаях применяют приближенную формулу, которая выражает локальную теорему Муавра – Лапласа.

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}; x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \qquad (3)$$

Применяется при больших значениях *n* $(n \to \infty)$ *и* $0<p<1$ (не слишком малом), $n \cdot p \geq 10$. Функция $\varphi(x)$ - затабулирована (см. таблицу 2 приложения), при этом следует учитывать, что;

а) $\varphi(-x) = \varphi(x)$ - функция четная, таблица составлена для $x \geq 0$;

б) $\varphi(x) = 0$ при $x \geq 4$.

В нашей задаче $n=900$ (велико, $n>>10$) и $p=0,9$ (не очень малое число), $m=800$.

Найти: $P_{900}(800)$.

Найдем значение $q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$

Решение можно оформить следующим образом:

1) $np = 900 \cdot 0,9 = 810$

2) $\sqrt{npq} = \sqrt{810 \cdot 0.1} = \sqrt{81} = 9$

3) $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{800 - 810}{9} = -\dfrac{10}{9} \approx -1,11$

4) $\varphi(x) = \varphi(-1,11) = \varphi(1,11) = 0,2155$ - использовали свойство четности, значение $\varphi(x)$ нашли по таблице 2 приложения.

5) $P_{900}(800) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \approx \dfrac{1}{9} \cdot 0,2155 = 0,0239$.

б) Для решения этой задачи используем интегральную теорему Лапласа.

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \qquad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Применяется при вычислении вероятности того, что событие A в n независимых испытаниях появится не менее m_1 и не более m_2 раз при условии, что n велико $(n \to \infty)$, $0<p<1$ (не слишком мало).

Функция $\Phi(x)$ называется интегральной функцией Лапласа, ее значения затабулированы (см. таблицу 3 приложения), при пользовании таблицей следует учесть, что:

а) $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ – функция нечетная;

б) $\Phi(x)=0{,}5$ при $x\geq 5$.

В нашей задаче $n=900$ (велико), $p=0{,}9$ (не очень мало), также даны границы изменения m: $m_1=800$; $m_2=860$.

Найти: $P_{900}(800 \leq m \leq 860)$.

Найдем значение $q=1-p=1-0{,}9=0{,}1$

Решение можно оформить следующим образом:

1) $np=810;$

2) $\sqrt{npq}=9$

3) $x_1=\dfrac{800-810}{9}\approx -1{,}11;\quad x_2=\dfrac{860-810}{9}=\dfrac{50}{9}\approx 5{,}56$

4) $P_{900}(800 \leq m \leq 860)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\Phi(5{,}56)-\Phi(-1{,}11)=\Phi(5{,}56)+\Phi(1{,}11)=$ $0{,}5+0{,}3665=0{,}8665$

При нахождении значений $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$ использовали свойство нечетности функции $\Phi(x)$ и $\Phi(5{,}56)=0{,}5$ т.к. $x>5$, для нахождения $\Phi(1{,}11)$ пользовались таблицей 3 приложения.

Тема:16. Случайная величина. Законы распределения случайной величины. Числовые характеристики (задачи 271-290). Перед выполнением задач необходимо изучить разделы 29,30 ДЕ-7(теория вероятностей).

271-280. Задан закон распределения случайной величины *X* (в первой строке таблицы даны возможные значения величины *X*, а во второй строке указаны вероятности *p* этих возможных значений).

Найти: 1) математическое ожидание *M(X)*; 2) дисперсию *D(X)*; 3) среднее квадратическое отклонение σ.

271.

X	*10*	*12*	*20*	*25*	*30*
p	*0,1*	*0,2*	*0,1*	*0,2*	*0,4*

272.

X	*8*	*12*	*18*	*24*	*30*
p	*0,3*	*0,15*	*0,25*	*0,2*	*0,1*

273.

X	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*
p	*0,5*	*0,15*	*0,2*	*0,05*	*0,1*

274.

X	*21*	*25*	*32*	*40*	*50*
p	*0,1*	*0,25*	*0,3*	*0,2*	*0,15*

275.

X	*10*	*12*	*16*	*18*	*20*
p	*0,25*	*0,2*	*0,4*	*0,1*	*0,05*

276.

X	*11*	*15*	*20*	*25*	*30*
p	*0,4*	*0,2*	*0,15*	*0,2*	*0,05*

277.

X	*12*	*16*	*21*	*26*	*30*
p	*0,2*	*0,1*	*0,4*	*0,2*	*0,1*

278.

X	*13*	*17*	*22*	*27*	*30*
p	*0,1*	*0,2*	*0,4*	*0,2*	*0,1*

279.

X	*14*	*18*	*23*	*28*	*30*
p	*0,1*	*0,4*	*0,3*	*0,15*	*0,05*

280.

X	*15*	*20*	*24*	*29*	*30*
p	*0,1*	*0,2*	*0,25*	*0,05*	*0,4*

Решение типового примера

Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения.

Найти: 1) математическое ожидание *M(X)*; 2) дисперсию *D(X)*;

3) среднее квадратическое отклонение σ.

X	*-1*	*2*	*4*	*7*
p	*0,1*	*0,3*	*0,4*	*0,2*

Решение:

1) Математическое ожидание дискретной случайной величины определим по формуле:

$M(X)=x_1 p_1+ x_2 p_2+\ldots+ x_n p_n$ или $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

$M(X)$ = -1·0,1+2·0,3+4·0,4+7·0,2= -0,1+0,6+1,6+1,4=3,5.

Дисперсия по определению: $D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2$, но проще вычислить дисперсию по формуле:

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2$$

Составим закон распределения случайной величины X^2

X^2	1	4	16	49
p	0,1	0,3	0,4	0,2

$M(X^2)$=1·0,1+4·0,3+16·0,4+49·0,2=0,1+1,2+6,4+9,8=17,5

$D(X)$=17,5-(3,5)^2=5,25

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$,

$\sigma(X)=\sqrt{5{,}25}\approx 2{,}29$.

281-290. Непрерывная случайная величина *X* задана функцией распределения *F(x)*. Найти 1) плотность распределения *f(x)*;2)математическое ожидание; 3) дисперсию и среднее квадратичное отклонение; 4)вероятность попадания случайной величины в данный интервал $(\alpha;\beta)$; 5) построить графики функции распределите *F (x)* и плотности распределения *f(x).*

281. $F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<0 \\ \frac{1}{4}(x-1) & при\ 0\le x<4 \\ 1 & при\ x\ge 4 \end{cases}$ (0;2)

282. $F(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x<0 \\ \frac{1}{4}x & при\ \ 0\le x<4 \\ 1 & при\ \ x\ge 4 \end{cases}$ (3;5)

283. $F(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x\le 0 \\ \frac{x^2}{64} & при\ \ 0<x\le 8 \\ 1 & при\ \ x>8 \end{cases}$ (–2;4) .

284. $F(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x<2 \\ x-2 & при\ \ 2\le x<3 \\ 1 & при\ \ x\ge 3 \end{cases}$ (2,5;4)

285. $F(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x<-1 \\ \frac{1}{3}(x+1) & при\ \ -1\le x<2 \\ 1 & при\ \ x\ge 2 \end{cases}$ (0.2)

286. $F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<6 \\ x-6 & при\ 6\le x<7 \\ 1 & при\ x\ge 7 \end{cases}$ (2;6,5)

$$287.\quad F(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x<0 \\ 0{,}2x & при\ \ 0\le x<5 \\ 1 & при\ \ x\ge 5 \end{cases} \qquad (1;6)$$

$$288.\ F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<4 \\ x-4 & при\ \ 4\le x<5 \\ 1 & при\ x\ge 5 \end{cases} \qquad (2;4{,}5)$$

$$289.\quad F(x)=\begin{cases} 0 & при\ \ x\le 0 \\ x^2/16 & при\ \ 0<x\le 4 \\ 1 & при\ \ x>4 \end{cases} \qquad (-1;2)$$

$$290.\ \ F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x<4 \\ x-4 & при\ \ 4\le x<5 \\ 1 & при\ x\ge 5 \end{cases} \qquad (2;4{,}5)$$

Решение типового примера.

Случайная величина X задана интегральной функцией распределения *F(x)*. Найти: 1) дифференциальную функцию распределения *f(x);*

2) математическое ожидание *M(X);*3) дисперсию *D(X);*

4) вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha;\ \beta)$;

5) постройте графики функций *F(x)* и *f(x)*.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,при\ x<1 \\ \dfrac{1}{8}(x^2-1) & ,при\ 1\le x\le 3 \\ 1 & ,при\ x>3 \end{cases} \qquad (2;\ 5)$$

Решение:

1) Найдем дифференциальную функцию, плотность распределения f(x) по определению: $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\textit{при } x<1 \\ \frac{1}{4}x & ,\textit{при } 1\le x \le 3 \\ 0 & ,\textit{при } x>3 \end{cases}$$

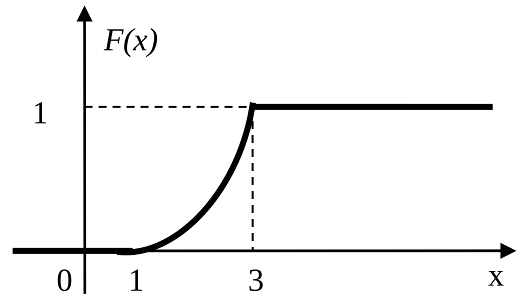

Рисунок 5

2) Математическое ожидание непрерывной случайной величины находим по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} x \cdot 0dx + \int_{1}^{3} x \cdot \frac{1}{4}xdx + \int_{3}^{+\infty} x \cdot 0dx = \frac{1}{4}\int_{1}^{3} x^2 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^3 = \frac{1}{12}[27-1] = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

3) дисперсию найдем по формуле: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} x^2 \cdot 0dx + \int_{1}^{3} x^2 \cdot \frac{1}{4}xdx + \int_{3}^{\infty} x^2 dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{16}[81-1] = 5$$

$$D(X) = 5 - \frac{169}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}305$$

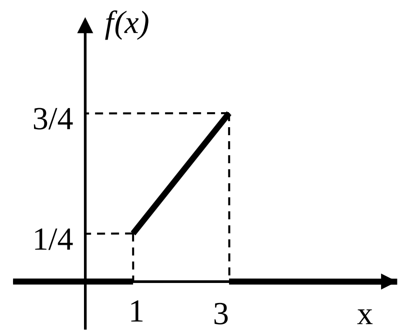

Рисунок 6

4) вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$P(2 < X < 5) = F(5) - F(2) = 1 - \frac{1}{8}(4-1) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$$

5) Строим график функции *F(x),* при этом учитываем, что $0 \le F(x) \le 1$ и на отрезке $[1;3]$ графиком является парабола $y = \frac{1}{8}(x^2-1)$, рисунок 5. График плотности *f(x)* при $x<1\, и\, x>3$ совпадает с осью OX, на отрезке $[1;3]$ с прямой $y = \frac{1}{4}x$. Рисунок 6.

Тема:17. Нормальный закон распределения (задачи 291-300). Перед выполнением задач необходимо изучить раздел 31 ДЕ-7

291-300. Дано, что детали, выпускаемые цехом, по размеру диаметра распределены по нормальному закону. Стандартная длина диаметра детали (математическое ожидание) равна, *a* мм, среднее квадратическое отклонение - σ мм. Найти:

1) плотность нормального распределения;

2) вероятность того, что диаметр наудачу взятой детали будет больше α мм и меньше β мм;

3) вероятность того, что диаметр детали отклонится от стандартной длины не более чем на ε мм.

Значения $a, \sigma, \alpha, \beta, \varepsilon$ даны.

№ зад.	a	σ	α	β	ε
291	55	5	50	60	2
292	52	3	55	58	1
293	28	4	32	44	0,5
294	30	5	25	37	2
295	40	2	35	47	1,5
296	32	2	28	40	1
297	25	1	21	30	0,5
298	43	3	37	49	2
299	60	4	57	65	6
300	62	6	59	70	8

Решение типового примера.

Известны математическое ожидание *M(x)=10* и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 12$ нормально распределенной случайной величины.

Найти: 1) плотность нормального распределения; 2) вероятность попадания этой случайной величины в интервал *(25;40);* 3) вероятность заданного отклонения $\varepsilon = 5$ случайной величины от её математического ожидания.

Решение.

1) Случайная величина X имеет нормальное распределение, если её плотность распределения имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

где *a=M(X)* – математическое ожидание, $\sigma = \sigma(x)$- среднее квадратичное отклонение.

В нашей задаче $a = 10,\ \sigma = 12$, тогда $f(x) = \frac{1}{12 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-10)^2}{288}}$.

2) Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал вычисляется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$- интегральная функция Лапласа (табл. 3 приложения).

$$P(25 < X < 40) = \Phi\left(\frac{40-10}{12}\right) - \Phi\left(\frac{25-10}{12}\right) = \Phi\left(\frac{30}{12}\right) - \Phi\left(\frac{15}{12}\right) =$$
$$= \Phi(2{,}5) - \Phi(1{,}25) = 0{,}4938 - 0{,}3944 = 0{,}0994.$$

3) Вероятность заданного отклонения находиться по формуле:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

$$P(|X - a| < 5) = 2\Phi\left(\frac{5}{12}\right) = 2\Phi(0{,}42) = 2 \cdot 0{,}1628 = 2 \cdot 0{,}1628 = 0{,}3256$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$- интегральная функция Лапласа (табл. 3 приложения).

Литература

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – 11-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 608 с.

2. Сборник задач по высшей математике: 1 курс / К.Н. Лунгу и др. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

Махова, Н. Б. Неопределенные и определенные интегралы: курс лекций: учебное пособие / Н. Б. Махова, Ф. К. Мацур. — Москва: РУТ (МИИТ), 2015. — 68 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/188452. — Режим доступа: по подписке ПримГСХА. — Текст: электронный.

4. Богомолов, Н. В. Математика: учебник / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — М. : Юрайт, 2019. — 401 с. — ISBN 978-5-534-07001-9. — URL: https://biblio-online.ru/bcode/431945 — Режим доступа: по подписке ПримГСХА. — Текст: электронный.

5. Математика. Теория вероятностей: учебное пособие / А. И. Созутов, В. П. Сакулин, Н. Н. Рыбакова, Е. Б. Лученкова. — Красноярск: СФУ, 2020. — 128 с. — ISBN 978-5-7638-4316-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/181624— Режим доступа: по подписке ПримГСХА. — Текст: электронный.

6. Голубева, Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие / Е. А. Голубева. — Нижний Новгород: ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2020 — Часть 1 — 2020. — 51 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/191924— Режим доступа: по подписке ПримГСХА. — Текст: электронный.

Приложения

Таблица 1

Значения функции $p(m) = \dfrac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$

a/m	0	1	2	3	4	5	6	7
0,1	0,90484	09048	00452	00015	00000	00000	00000	00000
0,2	81873	16375	01638	00109	00006	00000	00000	00000
0,3	74082	22225	03334	00333	00025	00002	00000	00000
0,4	67032	26813	05363	00715	00072	00006	00000	00000
0,5	69653	30327	07582	01264	00158	00016	00001	00000
0,6	54881	32929	09879	01976	00296	00036	00004	00000
0,7	49659	34761	12166	02839	00497	00070	00008	00001
0,8	44933	35946	14379	03834	00767	00123	00016	00002
0,9	40657	36591	16466	04940	01112	00200	00030	00004
1	36788	36788	18394	06131	01533	00307	00051	00007
2	13534	27067	27067	18045	09022	03609	01203	00344
3	04979	14936	22404	22404	16803	10082	05041	02160
4	01832	07326	14653	19537	19537	15629	10420	05954
5	00674	03369	08422	14037	17547	17547	14622	10445
6	00248	01487	04462	08924	13385	16062	16062	13768
7	00091	00638	02234	05123	09123	12772	14900	14900

Таблица 2

Значения функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3824	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2956	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0097	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0036	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009

3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Таблица 3

Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2708	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3696	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4034	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4951
2,6	4953	4955	4956	4067	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

x		x		x		x	
3,0	0,49865	3,5	0,49977	4,0	0,499968	4,5	0,4999966
3,1	0,49903	3,6	0,49984	4,1	0,499979	4,6	0,4999979
3,2	0,49931	3,7	0,49989	4,2	0,499987	4,7	0,4999987
3,3	0,49952	3,8	0,49993	4,3	0,499991	4,8	0,4999992
3,4	0,49966	3,9	0,49995	4,4	0,499995	4,9	0,4999995

Таблица 4.

Значения параметра $t_\gamma = t(\gamma; n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	,862	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Савельева Екатерина Владимировна

Математика: методические указания для выполнения контрольной и самостоятельной работы по дисциплине (модулю) для обучающихся заочной формы обучения по направлению подготовки 21.03.02 Землеустройство и кадастры. Часть 1.

Электронное задание

ФГБОУ ВО Приморская ГСХА

Адрес: 692510, г. Уссурийск, пр-т Блюхера, 44